

航海者導向的大圈航法之程式開發^①

The Developed Programs of Navigator-oriented Great Circle Sailings

陳志立 (Chih-Li Chen)^②、陳怡君 (Yi-Chun Chen)^③、李彥瑤 (Yen-Yao Lee)^③

摘要

航程計畫的大洋航行，大圈航法之計算程序始終是首要工作，對資淺航海者而言，其在計算時，存在過多人工判斷以及因繁瑣的計算過程，使得計算程序不符實務要求；另外，多數現有的大圈航法之計算程式欠缺完整性及彈性，此引發了本文的研究動機。因此，本文提出一套整合大圈方程式法及直角球三的納皮爾法則等相關公式之計算程序，繼而採用 MATLAB[®]內建的圖形使用者介面，成功地開發出具有人性化且航海者導向的大圈航法之計算程式，並命名為 GCS_Departure；最後該自行開發之程式均透過實際的例題確認無誤。

關鍵字：大圈航法、大圈方程式法、納皮爾法則

Abstract

The computation procedures of great circle sailings (GCS) are always the primary task in open sea sailings of voyage plan. Many artificial judgments needed in calculation and the tedious process make these computation procedures impractical for inexperienced navigators. Besides, most relevant GCS computational programs are lack of completeness and flexibility. It leads to the motivation of this article. Therefore, an integral computation procedure

^① 本文為行政院國家科學委員會專題研究計畫 (編號：NSC 96-2628-E-019-022-MY3) 之部分研究成果，承蒙經費補助特此致謝。

^② 國立臺灣海洋大學商船學系 副教授 (聯絡地址：20224 基隆市中正區北寧路二號；E-mail：clchen@mail.ntou.edu.tw)

^③ 國立臺灣海洋大學商船學系 碩士

combining the great circle equation method (GCEM) and Napier's rules of right-angled triangles is proposed and then, the Graphical User Interface (GUI) built in the MATLAB[®] is adopted to develop friendly navigator-oriented GCS program, namely the GCS_Departure. This self-developed program is verified with several examples presented in currently available books.

Keywords: Great circle sailings (GCS), Great circle equation method (GCEM), Napier's rule

壹、緒論

無論是定期 (liner) 或是不定期 (tramp) 航線，航海者 (navigator) 在每一航次之前，均必須擬定航程計畫 (voyage plan) (楊籙、薩師洪，1978；周和平，1996；薩師洪，1997；郭禹，1998；Bowditch, 1981；Maloney, 1985；Bowditch, 2002；Cutler, 2004)，該計畫概分為兩大階段，即評估 (assessment) 和計算 (computation)。以大洋航行為例，評估階段，係參考當月份導航圖 (pilot charts) 裡風及流的情況，亦考量季節性的氣候分布等，思考採用幾段大圈航路或混合航路，並藉以決定主要轉向點 (main waypoints)；而計算階段，則將前述資訊，透過各航法之計算，求得航路上各轉向點及其間各段麥氏航路的航向和距離等的結果資訊，最後，將該等資訊移轉繪製於麥氏海圖 (Mercator chart) 上或人工輸入電子海圖顯示資訊系統 (electronic chart display and information system, ECDIS)，經

再三檢核確認後，即可執行航程計畫。簡言之，評估階段之目標為安全及節能，其重點在於主要轉向點的選擇；而計算階段則是最短距離，其重點為航法之計算。

地球表面上任意兩點的最短距離為大圈弧線 (great circle arc) (徐正梅，1999；Clough-Smith, 1966)。當船舶橫跨大洋航行時，最短路徑即為大圈航路 (great circle track)，由於大圈，除赤道與子午線外，其與各子午線的交角都不相等，因此，欲使船舶專注於改變航向以保持航行在大圈航路上，是件不可能的事；在實務上，係採用一組恆向線 (rhumb lines) 來逼近大圈航路。綜言之，大圈航法 (great circle sailings, GCS) 的主要問題，係在航海者給定的初始條件下，求解大圈航路上各轉向點位置，即緯度和經度；之後，再將各轉向點位置移轉至麥氏海圖上，各分段均採用麥氏航法 (Mercator sailings, MS)；即大圈航法在實務上係為分段的麥氏航法 (陳志立等，2003)。

大圈航法問題之求解方法概分為三：量度法 (by charts)、查表法 (by tables) 和計算法 (by computation)。理論上，後者遠比前兩種方法精確許多；伴隨科技發展，使得計算法更為重要，然大圈航法之各計算程序不少，如慣用計算程序 (楊籙、薩師洪，1978；周和平，1996；薩師洪，1997；郭禹，1998；Bowditch, 1981; Maloney, 1985; Bowditch, 2002; Cutler, 2004)、新計算程序 (張建仁、陳志立，2003) 以及大圈方程式法 (great circle equation method, GCEM) (陳志立等，2003；Chen, 2003; Chen et al., 2004) 等；更由於計算過程中，存在眾多人工判斷及其計算繁瑣性；再加上於實務上，航海者偏好以啟航點為基準，且其初始條件則有定值的經度差或大圈距離等，此觸動了欲撰寫航海者導向的大圈航法之計算程式的最初動機。

人性化使用者介面之設計，有著令人親近且容易操作的效果；完整的功能展示，再加上輸入選項的彈性以及輸出結果分析，更讓使用者有更寬廣的使用彈性及對大圈弧線更深入的瞭解。從計算情境、輸入偵錯與彈性選項以及輸出結果分析等功能審視現有的相關大圈航法之計算程式，如美國軍方國家地理空間智慧局 (National Geospatial-intelligence Agency, NGA) 網站內互動式網頁 (NGA, 2010a) 以及商業軟體內大圈航法之程式如 Navigator

(Reis, 2006) 和 NavPac (Hohenkerk and Yallop, 2004) 等，發現它們均不夠完整且更重要的是欠缺彈性選項，此更引發了本研究欲開發航海者導向的大圈航法之計算程式的強烈動機。

本文除本節之緒論外，後續內容安排如下：第二節就大圈航法之各計算程序及其現有程式等進行文獻回顧，繼而在第三節提出一套整合大圈方程式法及球面三角學裡納皮爾法則 (Napier's rules) 等相關公式之計算程序，進而採用MATLAB[®] 程式語言內建的圖形使用者介面 (Graphical User Interface, GUI)，開發出具有人性化且航海者導向的大圈航法之計算程式，並於第四節透過實例確認本文所自行開發的程式，最後一節提出本研究之結論。

貳、文獻回顧

首先，藉由與大圈航法相關之各種計算程序等文獻回顧，以航海者的觀點思考並整合一套適當的計算程序來開發程式；另透過現有的大圈航法之計算程式等文獻回顧，思考並設計人性化面版。

2.1 計算方法之評析

國內外常用的「航海學」教材 (楊籙、薩師洪，1978；周和平，1996；薩師洪，1997；郭禹，1998；Bowditch, 1981;

Maloney, 1985; Bowditch, 2002; Cutler, 2004), 其求解方法如前述, 即量度法、查表法及計算法; 量度法係在大圈海圖 (great circle chart) 或球心切面投影圖 (gnomonic projection) 等直接量取; 查表法則使用測天解算表 (sight reduction tables) 或簡算表冊 (short method tables) 等求解, 而計算法乃是應用球面三角學的公式去計算出各轉向點之緯度和經度。學理上, 計算法所求得的大圈航路資訊相當精確; 又由於科技的大幅成長, 使得開發程式更具有可行性及急迫性。傳統上, 求解大圈航法問題的慣用計算程序之整體構想, 在於巧妙地應用大圈弧線上頂點位置處的球面

幾何性質, 即大圈弧線與子午線相交為直角。而有了這個直角特性, 頂點 (V)、近極點 (P_{nr}) 及大圈航路上各轉向點 (X_i) 即可形成多數個直角球三, 如圖 1 所示。據此, 便可靈活使用納皮爾法則, 輕易地求得各轉向點位置。慣用計算程序之求解步驟彙整如下:

1. 求得大圈距離及大圈初航向;
2. 依據啟航點和大圈初航向角, 求得頂點位置;
3. 根據頂點和航海者所給定初始條件, 使用納皮爾法則, 求解各轉向點位置;
4. 採用麥氏航法計算各轉向點間 (各段) 的麥氏航向和麥氏距離。

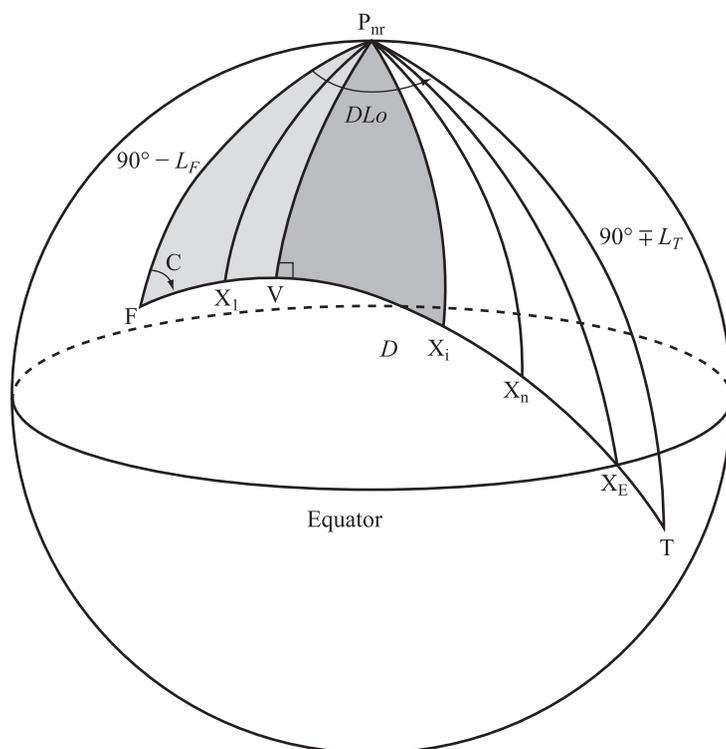


圖 1 慣用的大圈航法之計算程序 (參考頂點) 示意圖

由於慣用的大圈航法之計算程序，係以頂點位置為參考基準點，再輾轉求得大圈航路上各轉向點位置，準此，該法被稱為「參考頂點之計算程序 (computation procedure with reference to the vertex)」。

因此，正確的頂點位置即為該計算程序的關鍵，然頂點位置的決定則必須透過大圈初航向角的數值作條件判斷。

陳志立等人 (陳志立等, 2003; Chen, 2003; Chen et al., 2004) 發現各相關論著對該計算程序中每一步驟之求解公式有不一致的現象 (楊籙、薩師洪, 1978; 周和平, 1996; 薩師洪, 1997; 郭禹, 1998; Bowditch, 1981; Maloney, 1985; Bowditch, 2002; Cutler, 2004)，因此，提出「最小誤差傳播」和「簡單性」等兩項評估準則，建立一個最佳化慣用計算程序，以釐清航海者在計算求解過程中莫衷一是的困惑。

張建仁和陳志立 (2003) 認為，學理上，大圈弧線上過赤道點的決定比頂點來得容易；其應用極對偶定理 (polar duality theorem, PDT)，將多數個直角球三均轉變為象限球三；以建立一套大圈航法之新計算程序或稱為「參考過赤道點之計算程序 (computation procedure with reference to the equator crossing point)」。

另因上述兩計算程序，在本質上均屬於間接式的計算方法，因此，陳志立等人 (陳志立等, 2003; Chen, 2003; Chen et

al., 2004) 回到問題起初，直接思考問題，其使用固定座標系統和相對子午線觀念的兩技巧，配合向量代數，簡化且直接地建構出大圈方程式，並以之為基礎，提出一個創新的計算方法，即為大圈方程式法或稱「參考啟航點之新計算方法 (a novel approach with reference to the departure point)」；此法對求解大圈航路上的任何一點如頂點、過赤道點及各轉向點等，均能直接且不需判斷而準確地計算求得。

彙整大圈航法之各計算程序或方法等彼此間關係圖如圖 2 所示。從文獻中例題分析，新計算方法，確實直接和簡單且優於另兩計算程序。另外，相對於最佳化慣用計算程序而言，新計算程序的改進空間不大，然可提供航海者另一種思考，畢竟象限球三其實就是直角球三在其極對偶球三上的自我表現的形式。又在實例中可發現，近極點、頂點和過赤道點所形成的球三，既為直角球三亦為象限球三，更是一等腰球三 (張建仁、陳志立, 2003)。

實務上，從航海者的觀點而言，大圈航路的第一個轉向點即為啟航點或在其附近，據此，本研究欲開發程式所需的計算公式，將以大圈方程式法計算大圈弧線的基本資訊，再輔以直角球三的納皮爾法則，求解大圈航路上各轉向點，最後則以麥氏航法計算各轉向點間的麥氏航向和麥氏距離。

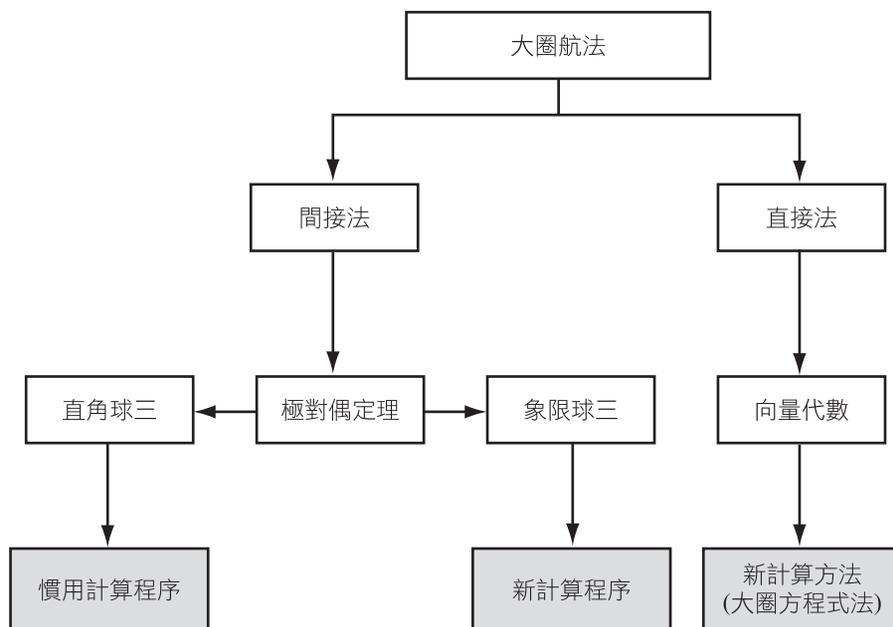


圖 2 大圈航法之各計算程序或方法的關係圖

2.2 現有程式之評析

人性化面版之設計，除功能的完整性外，更重要的是給予使用者較大的彈性；以本研究為例，其功能有計算情境（不同初始條件）、輸入偵錯與彈性選項以及輸出結果分析等；其中，彈性係指航海者所給定初始條件及其選項之要求。

以航法計算器 (sailing calculator) 作為關鍵詞進行搜尋，可得到不少的網頁，以最可靠的美國軍方國家地理空間智慧局 (NGA) 網站內海事安全資訊 (maritime safety information) 的互動式網頁 (interactive webpage) 為例說明 (NGA, 2010a)，其大圈航法在計算轉向點位置時，僅有給定經度求緯度的計算情境，更遑論其他功能。

大圈航法的商業程式，則有巴西 Navigator (Reis, 2006) 和英國 NavPac (Hohenkerk and Yallop, 2004) 等。Navigator 的計算情境係採用給定轉向點個數，不符航海者的習慣；無輸入偵錯功能且輸入選項欠缺彈性；輸出結果分析僅列出各轉向點位置。至於 NavPac 的計算情境，雖符合航海者的習慣；然輸入偵錯採自動修正且輸入選項欠缺彈性；另其輸出結果分析則欠缺麥氏距離總值相對於大圈距離理論值的增量及其距離增率。

彙整現有的相關大圈航法之程式並相互比較之，如表 1 所示。據此，本研究的人性化面版之設計，將會納入計算情境、輸入偵錯與彈性選項以及輸出結果分析等功能；另在輸入選項部分亦會考量航海者

表 1 現有大圈航法之計算程式的功能比較表

程式名稱	參考點	計算情境	輸入偵錯與選項	輸出結果分析
NGA	未知	• 給定轉向點經度	• 無偵錯功能	• 轉向點緯度
Navigator	啟航點	• 給定轉向點個數	• 無偵錯功能 • 欠缺彈性	• 各轉向點位置
NavPac	啟航點	• 給定經度差 • 給定大圈距離	• 偵錯採自動修正 • 欠缺彈性	• 各轉向點位置 • 各段的麥氏航向及其距離

的實際需求。

另值得一提的是，在麥氏航法之程式，NGA 的麥氏航法係給定兩點位置，可計算出該段的麥氏航向及其距離，而其緯度漸長比數單位 (meridional parts, M) 是採用 1984 年世界大地參考座標 (1984 World Geodetic System, WGS-84) 之數值 (NGA, 2010b)。至於 NavPac 的麥氏航法之程式，其麥氏航向亦採用漸長比數單位差；但其麥氏距離則使用漸長比數距離差 (difference in meridional distances) 取代緯度差 (Bennett, 1996)。

並分別採用大圈方程式法或直角球三的納皮爾法則公式，計算各轉向點位置；最後則是使用麥氏航法計算各轉向點間的麥氏航向及麥氏距離。

程式撰寫除邏輯性外，重點在於計算公式的選擇；由於本研究之計算公式均為三角方程式，據此，反三角函數的值域相當關鍵，其理由在於值域有助於頂點或過赤道點的判定。另便於說明及快速參考等因素，茲將所有變數或參數的符號及其定義或說明等，彙整於附錄。

必須強調的是，地球座標系統之位置變數在數值運算時，其正負符號規定係採北緯及東經為正值；南緯及西經則為負值。同樣地，緯度差及經度差的方向亦同，即往北及往東為正值；而往南及往西為負值。

參、程式之計算流程及其開發工具

3.1 程式之計算流程

計算流程分為三步驟。步驟 1 係採大圈方程式法之相關公式求解大圈弧線之基本資訊，如大圈距離、大圈初航向、兩頂點及兩過赤道點等；步驟 2 則以啟航點為基準，即航海者的習慣，且依據其給定之初始條件，即定值的經度差或大圈距離，

1. 大圈弧線之基本資訊 (步驟 1)：

(1) 大圈距離 (Dg)：使用球三邊餘弦公式計算之，

$$\cos Dg = \sin L_F \cdot \sin L_T + \cos L_F \cdot \cos L_T \cdot \cos DLo \quad (1)$$

(2) 大圈初航向角 (C):

$$\cos C = \frac{\sin L_T - \sin L_F \cdot \cos Dg}{\cos L_F \cdot \sin Dg} \quad (2)$$

文獻 (陳志立等, 2003; 陳志立等 2007; Chen, 2003; Chen et al., 2004) 建議, 在考量「最小誤差傳播」評估準則下, 宜採用四鄰公式, 然 \arctan 之值域為 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 對於而後航向角 (C) 轉換為航向 (Cn) 時較為繁瑣; 據此, 且基於 \arccos 之值域為 $[0, \pi]$, 故本研究則使用球三邊餘弦變形公式求解之; 然使用該式時, 應注意數值之正負號; 其原則為與啟航點緯度同名者, 其值 (符號) 為正; 反之, 若異名者, 其值為負 (陳志立等, 2003; Chen et al., 2004)。

• 航向角 (C) 轉換航向 (Cn) 之判別式:

$$Cn = \begin{cases} C, & L_F > 0, \quad DLo > 0 \\ 360^\circ - C, & L_F > 0, \quad DLo < 0 \\ 180^\circ - C, & L_F < 0, \quad DLo > 0 \\ 180^\circ + C, & L_F < 0, \quad DLo < 0 \end{cases} \quad (3)$$

(3) 頂點位置 (L_V, λ_V):

$$\tan DLo_{FV_i} = \frac{b}{a} \quad (4a)$$

$$\tan L_{V_i} = \frac{a \cdot \cos DLo_{FV_i} + b \cdot \sin DLo_{FV_i}}{-c} \quad (4b)$$

上述兩式中, a 、 b 、 c 係為大圈方程式之參數, 其計算式 (陳志立、許添本、張建仁, 2003; Chen, 2003; Chen et al., 2004) 如下:

$$\begin{cases} a = -\sin L_F \cdot \cos L_T \cdot \sin DLo \\ b = \sin L_F \cdot \cos L_T \cdot \cos DLo - \cos L_F \cdot \sin L_T \\ c = \cos L_F \cdot \cos L_T \cdot \sin DLo \end{cases} \quad (5)$$

必須說明的是, 式 (4a) 及 (4b) 中, \arctan 的值域為 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 其自然反應出, 頂點 (V_1) 係與啟航點 (F) 較近者, 且 L_{V_1} 與 L_F 同名; 而另一頂點 (V_2) 則可透過 $DLo_{V_2} = 180^\circ$ 求得 λ_{V_2} , 且 L_{V_2} 與 F 異名。

(4) 過赤道點 ($0, \lambda_E$):

$$\tan DLo_{FE_1} = -\frac{a}{b} \quad (6)$$

該式表現出, 過赤道點 (E_1) 與啟航點 (F) 較近; 另經由 $DLo_{E_1E_2} = 180^\circ$, 獲得另一過赤道點 (E_2)。

2. 大圈航路上各轉向點位置 (步驟 2):

情境 1: 給定經度 (λ_X), 求緯度 (L_X)。

$$\tan L_{X_i} = \frac{a \cdot \cos DLo_{FX_i} + b \cdot \sin DLo_{FX_i}}{-c} \quad (7)$$

另若初始條件係提供「定值的經度差 (DLo_{XX})」, 則與 λ_F 相較之, 可得 λ_{X_i} 及 DLo_{FX_i} ; 而後者代回上式, 可求得 L_{X_i} 。

情境 2: 給予「定值的大圈距離 (D_{XX})」, 求各轉向點位置。

欲求轉向點位置, 唯有採用直角球三的納皮爾法則公式, 而其輸入變數為 L_V 及 D_{VX_i} , 據此, 頂點 (V) 的判定即為關鍵; 然頂點有二, 且哪一頂點在或不在大圈航路上, 亦是重點。

首先採用「夾擊定理 (sandwich theorem)」概念，以「方向性」來判定頂點與大圈航路彼此間之關係如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 \text{ 在大圈航路上,} \\ DLo * DLo_{FV_1} * DLo_{V_1T} > 0; \quad (8a) \\ V_1 \text{ 不在大圈航路上,} \\ DLo * DLo_{FV_1} * DLo_{V_1T} < 0; \quad (8b) \\ V_2 \text{ 在大圈航路上,} \\ DLo * DLo_{FV_2} * DLo_{V_2T} < 0; \quad (8c) \\ V_2 \text{ 不在大圈航路上,} \\ DLo * DLo_{FV_2} * DLo_{V_2T} > 0; \quad (8c) \end{array} \right.$$

- 頂點 (V) 在大圈航路上：

該情況之 V，其包含 V_1 及 V_2 ，即式 (8a) 及 (8c)；而頂點至各轉向點之大圈距離 (D_{VX_i})，可透過下式獲得：

$$\begin{cases} D_{FX_i} = D_{XX} * i \\ D_{VX_i} = D_{FV} - D_{FX_i} \end{cases} \quad (9)$$

再經由直角球三的納皮爾法則公式，即

$$\sin L_{X_i} = \sin L_V \cdot \cos D_{VX_i} \quad (10)$$

$$\tan DLo_{VX_i} = \tan D_{VX_i} \cdot \sec L_V \quad (11)$$

即可求得 L_{X_i} 及 DLo_{VX_i} ；再透過下式，

$$\lambda_{X_i} = \begin{cases} \lambda_V - DLo_{VX_i}, & DLo > 0 \text{ (往東), } L_V * L_{X_i} > 0 \text{ (同名)} \\ \lambda_V - DLo_{VX_i} + 180^\circ, & DLo > 0 \text{ (往東), } L_V * L_{X_i} < 0 \text{ (異名)} \\ \lambda_V + DLo_{VX_i}, & DLo < 0 \text{ (往西), } L_V * L_{X_i} > 0 \text{ (同名)} \\ \lambda_V + DLo_{VX_i} + 180^\circ, & DLo < 0 \text{ (往西), } L_V * L_{X_i} < 0 \text{ (異名)} \end{cases} \quad (12)$$

即可求得 λ_{X_i} 。

- 頂點 (V) 不在大圈航路上：

該情況，即式 (8b) 及 (8d)；則選擇與經度差同向之頂點；而其判別式如下：

$$\begin{cases} V = V_1, DLo * DLo_{FV_1} > 0; \\ V = V_2, DLo * DLo_{FV_1} < 0. \end{cases} \quad (13)$$

至此，同理，頂點至各轉向點之大圈距離 (D_{VX_i}) 透過式 (9) 獲得，再經由直角球三的納皮爾法則公式，即式 (10) 和 (11)，可求得 L_{X_i} 及 DLo_{VX_i} ；再採用式 (12)，得到 λ_{X_i} 。

3. 麥氏航法計算各轉向點間的麥氏航向及其距離 (步驟 3)：

- (1) 麥氏航向角 (Cm)：

$$\tan Cm = \frac{dlo * 60'}{m} \quad (14)$$

式中，各轉向點間的經度差 (dlo) 及緯度漸長比數差 (m)，可由下式獲得：

$$\begin{cases} \ell = L_{X_{i+1}} - L_{X_i} \\ dlo = \lambda_{X_{i+1}} - \lambda_{X_i} \\ m = M_{X_{i+1}} - M_{X_i} \end{cases} \quad (15)$$

值得說明的是，緯度漸長比數 (M)，其係因麥氏海圖為保角變換而製造之公式 (陳志立、李彥瑤、劉思岑、蔡奇呈，2008)，其原型如下式：

$$M = a_e \cdot \ln \left[\tan \left(45^\circ + \frac{L}{2} \right) \times \left(\frac{1 - e \cdot \sin L}{1 + e \cdot \sin L} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \quad (16)$$

由於目前無論是電子海圖顯示資訊系統 (ECDIS) 及全球定位系統 (GPS) 均使用 WGS-84，故本研究採用其參數值： $a_e = 3437.74677078$ ； $e = 0.8181919$ ，前者為赤道 1 分弧所表示的數值；而後者為地球偏心率 (NGA, 2010b)。

- 麥氏航向角 (Cm) 轉換為麥氏航向 (Cmn) 之判別式：

$$Cmn = \begin{cases} Cm, & \ell > 0, \quad dlo > 0 \\ 360^\circ - Cm, & \ell > 0, \quad dlo < 0 \\ 180^\circ - Cm & \ell < 0, \quad dlo > 0 \\ 180^\circ + Cm & \ell < 0, \quad dlo < 0 \end{cases} \quad (17)$$

- (2) 麥氏距離 (dm)：

$$dm = \begin{cases} \ell \cdot \sec Cm, & Cm \neq 90^\circ \\ dlo \cdot \cos L_{X_i}, & Cm = 90^\circ \end{cases} \quad (18)$$

當麥氏航向角為 90° 時，則採用平行航法。

3.2 程式之開發工具

本文採用 MATLAB[®] (李顯宏，2006；洪維恩，2006；張聖明，2006) 程式語言作為程式開發工具，係因其屬於直譯式語言，能直接編寫、執行及偵錯 (debugger)；亦提供大圈航法相關之計算公式中，有關角度與徑度間轉換、三角及反三角函數的預設函式庫。另外，還可建立互動式的使用者圖形介面 (GUI)，設計可讓航海者直覺且簡單地操作的面板。針對輸入偵錯與彈性選項功能，本文所使用的關鍵語法如下：

- 錯誤訊息視窗

```
errorDlg('Please input DLo between each waypoint.','Input Error')
```

當輸入數值有不合理或未輸入的情況時，會顯示錯誤訊息視窗告知使用者，並要求重新輸入。

- 對話視窗

```
result=questdlg('Do you want to alter course from departure?','Attention','yes','no','no')
```

當未輸入第一轉向點時，會顯示對話視窗提醒使用者是否將以啟航點作為第一轉向點；或輸入的第一轉向點與啟航點之經度差超出設定經度差時，將顯示對話視窗藉以提醒，其會影響大圈航路上轉向點之個數。

本研究係從航海者觀點，提出一套整合大圈方程式法及直角球三的納皮爾法則等相關公式之計算程序，並採用 MATLAB[®] 內建的圖形使用者介面，開發出具有人性化且以啟航點為參考基準的大圈航法之計算程式，即 GCS_Departure，計算流程圖如圖 3 示。

肆、例題確認與說明

在實例確認 (verification) 時，因查表法計算結果不如計算法精確，係僅供參考；Navigator 計算情境不符合航海者的習慣，即欠缺選項彈性故不適用；NavPac 則欠缺特殊點計算，如頂點與過赤道點等，

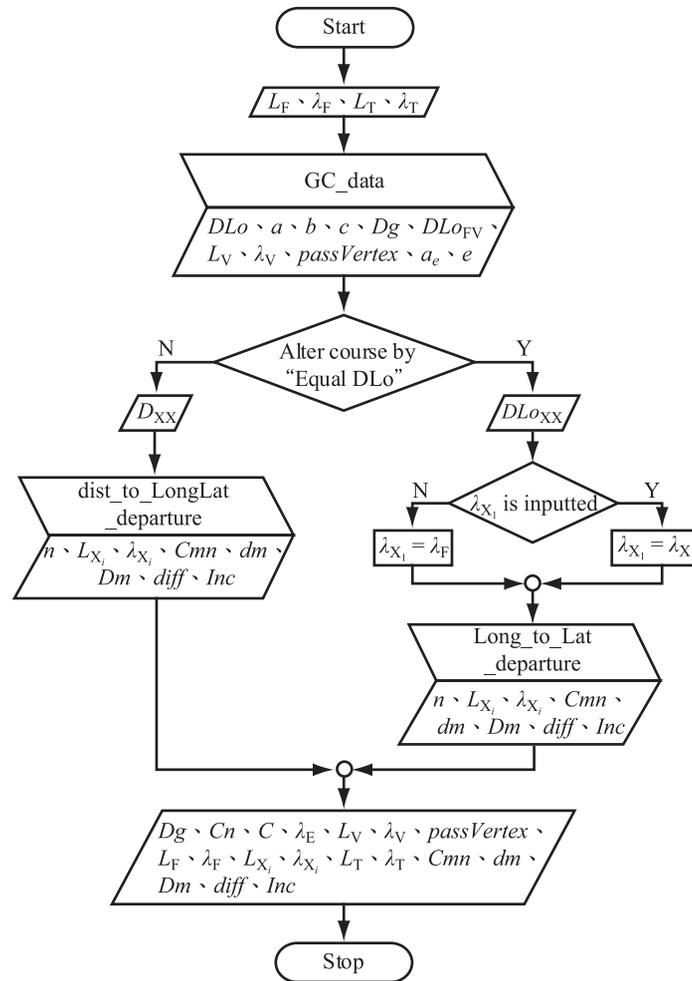


圖 3 GCS_Departure 程式之計算流程圖

即資訊不夠完整；至於 NGA 的大圈航法僅有「給經求緯」之計算程式，因此，將執行 GCS_Departure 程式所得的全部計算結果，即其在大圈弧線上各點位置等，均以該計算程式逐一確認之；且另使用 NGA 的麥氏航法之程式，一一比對各轉向點間的麥氏航向及麥氏距離。

【例題 1】

某船由南非的 Port Elizabeth (L 34°

02.0'S, λ 25°30.0'E)，以大圈航法航行至印度南端的 Laccadive Sea (L 8°09.0'N, λ 78°06.0'E) (楊籙、薩師洪，1978)。

【欲求】

1. 大圈弧線的基本資訊，如大圈距離及其初航向、頂點及過赤道點位置；
2. 自經度 30°00.0'E 起，每隔經度差 10°，求大圈航路上各轉向點位置，及各轉向點間之各段的麥氏航向和麥氏距離。

【計算】

執行 GCS_Departure 程式。

【結果與說明】

1. 操作結果如圖 4 示，而計算結果資訊彙

整於表 2。

2. 大圈弧線的基本資訊：

(1) 大圈距離及其初航向：GCS_Departure 程式、查表法及現有程式如 NGA、

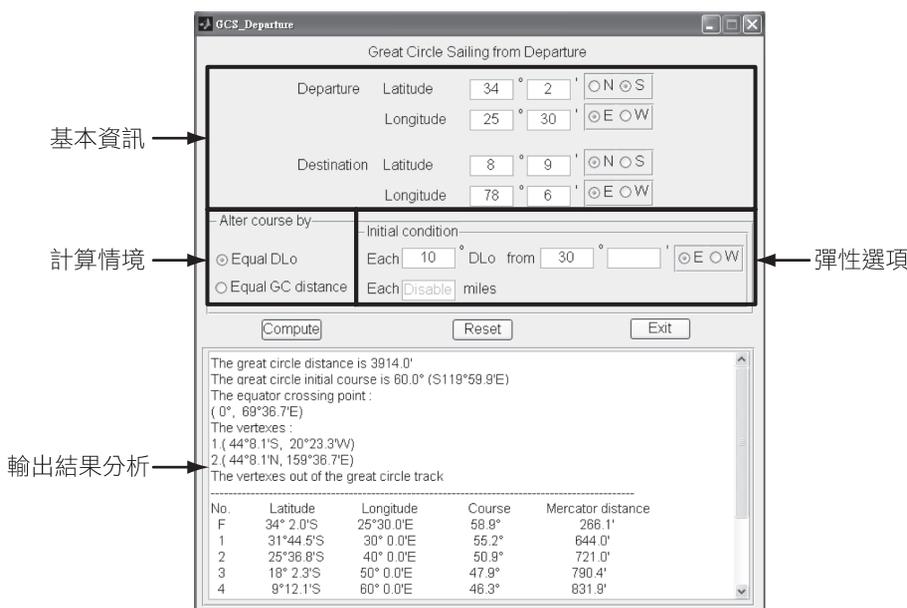


圖 4 GCS_Departure 程式操作結果 (例題 1)

表 2 GCS_Departure 程式計算結果 (例題 1)

The great circle distance is 3914.0'		The vertexes:		
The great circle initial course is 60.0° (S119°59.9'E)		1. (44°8.1'S, 20°23.3'W)		
The equator crossing point: (0°, 69°36.7'E)		2. (44°8.1'N, 159°36.7'E)		
		The vertexes out of the great circle track		
No.	Latitude	Longitude	Course	Mercator distance
F	34° 2.0'S	25°30.0'E	58.9°	266.1'
1	31°44.5'S	30° 0.0'E	55.2°	644.0'
2	25°36.8'S	40° 0.0'E	50.9°	721.0'
3	18° 2.3'S	50° 0.0'E	47.9°	790.4'
4	9°12.1'S	60° 0.0'E	46.3°	831.9'
5	0°22.6'N	70° 0.0'E	46.3°	674.7'
T	8° 9.0'N	78° 6.0'E		
The total Mercator distance is 3928.1'				
The difference between great circle and Mercator distance is 14.0'				
Increasing rate is 0.36%				

Navigator 及 NavPac 等，其結果均相同；

- (2) 頂點位置：現有程式均無法求得頂點位置；將執行 GCS_Departure 程式所得之頂點位置，以 NGA 的大圈航法之程式，即「給經求緯」方式計算，其結果均相同；該實例顯示：兩頂點皆不在大圈航路上；
- (3) 過赤道點：現有程式皆無法求得；同樣地，以 NGA 的大圈航法之程式確認之，其結果無誤。

3. 各轉向點及其間的麥氏航向及其距離：

- (1) 各轉向點位置：先與 NavPac 程式相較；再以 NGA 的大圈航法之程式進行確認，發現三者結果均相同。
- (2) 麥氏航向及其距離：與 NavPac 程式相較；再以 NGA 的麥氏航法之程式逐一比對，在麥氏航向部分，三者結果均相同；而麥氏距離，本研究的 GCS_Departure 程式與 NGA 所得結果，兩者結果一致。另大圈航法為分段的麥氏航法，由輸出結果分析，得知本實例之大圈航路有 5 個轉向點，其麥氏距離總值較大圈距離理論值增加 14 海浬；即其距離增率為 0.36%。

【例題 2】

某船由美國的 San Francisco (L 37° 47.5'N, λ 122°27.8'W)，以大圈航法航行至澳洲的 Sydney ((L 33°51.7'S, λ 151°12.7'E) (Bowditch, 1981)。

【欲求】

1. 大圈弧線的基本資訊，如大圈距離及其初航向、頂點及過赤道點位置，
2. 沿大圈弧線上，每隔 6° (360 浬)，求大圈航路上各轉向點位置，及各轉向點間之各段的麥氏航向和麥氏距離。

【計算】

執行 GCS_Departure 程式。

【結果與說明】

1. 操作結果如圖 5 示，而計算結果資訊彙整於表 3。
2. 大圈弧線的基本資訊，大圈距離及其初航向，本研究自行開發之程式與查表法及現有程式等，它們的結果均相同；頂點及過赤道點位置，由於現有程式均無法求得，執行 NGA 的大圈航法之程式逐一比較，確認 GCS_Departure 程式的計算結果無誤。該實例顯示：兩頂點均不在大圈航路上。
3. 各轉向點位置使用 NGA 的大圈航法之程式，逐一比對；而各段的麥氏航向及其距離，則採用 NGA 的麥氏航法之程式，逐一相較，兩者結果均確認本研究的 GCS_Departure 程式無誤。另結果分析，除啟航點與到達點外，整段大圈航路計有 17 個轉向點，其麥氏距離總值較大圈距離理論值增加 20.8 海浬，而距離增率為 0.32%。

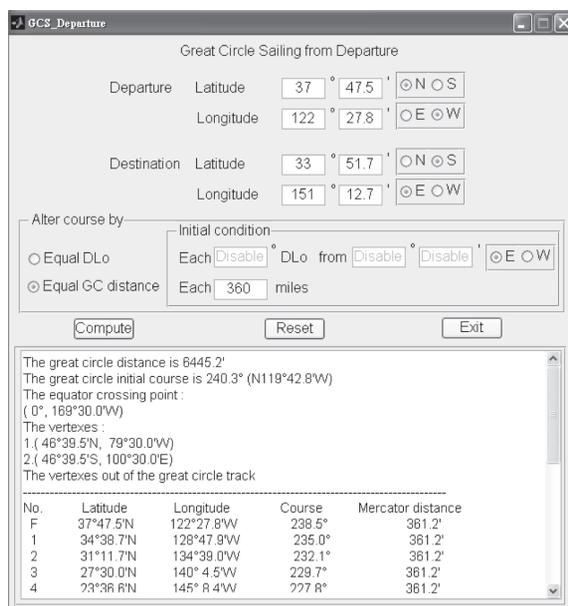


圖 5 GCS_Departure 程式操作結果 (例題 2)

表 3 GCS_Departure 程式計算結果 (例題 2)

The great circle distance is 6445.2'		The vertexes :		
The great circle initial course is 240.3° (N119°42.8'W)		1. (46°39.5'N, 79°30.0'W)		
The equator crossing point : (0°, 169°30.0'W)		2. (46°39.5'S, 100°30.0'E)		
		The vertexes out of the great circle track		
No.	Latitude	Longitude	Course	Mercator distance
F	37°47.5'N	122°27.8'W	238.5°	361.2'
1	34°38.7'N	128°47.9'W	235.0°	361.2'
2	31°11.7'N	134°39.0'W	232.1°	361.2'
3	27°30.0'N	140°4.5'W	229.7°	361.2'
4	23°36.6'N	145°8.4'W	227.8°	361.2'
5	19°33.8'N	149°54.4'W	226.2°	361.2'
6	15°23.9'N	154°26.1'W	225.0°	361.1'
7	11°08.7'N	158°47.1'W	224.2°	361.1'
8	6°49.9'N	163°0.5'W	223.7°	361.1'
9	2°28.9'N	167°9.3'W	223.5°	361.1'
10	1°52.9'S	171°16.6'W	223.7°	361.1'
11	6°14.0'S	175°25.0'W	224.1°	361.1'
12	10°33.2'S	179°37.6'W	224.9°	361.1'
13	14°49.0'S	176°2.7'E	226.0°	361.2'
14	18°59.7'S	171°32.6'E	227.5°	361.2'
15	23°3.6'S	166°48.8'E	229.4°	361.2'
16	26°58.5'S	161°47.6'E	231.8°	361.2'
17	30°42.0'S	156°25.3'E	234.5°	326.3'
T	33°51.7'S	151°12.7'E		
The total Mercator distance is 6466.0'				
The difference between great circle and Mercator distance is 20.8'				
Increasing rate is 0.32%				

【例題 3】

某船由澳洲的 Sydney ((L 33°51.5'S, λ 151°13.0'E)，以大圈航法航行至巴拿馬的 Balboa((L 8°53.0'N, λ 79°31.0'W) (陳志立等，2003)。

【欲求】

1. 大圈弧線的基本資訊，如大圈距離及其初航向、頂點及過赤道點位置，
2. 自經度 160°E 起，每隔經度差 10°，求大圈航路上各轉向點位置，及各轉向點間之各段的麥氏航向和麥氏距離；
3. 沿大圈弧線上，每隔 8° (480 浬)，求大圈航路上各轉向點位置，及各轉向點間之各段的麥氏航向和麥氏距離。

【計算】

執行 GCS_Departure 程式。

【結果與說明】

1. 本題之計算情境有二，其一為「給經求緯」，操作結果如圖 6 所示，而其結果資訊彙整於表 4；另一則為「給大圈距離求經緯度」，操作結果及其結果資訊分別如圖 7 與表 5 所示。
2. 大圈弧線的基本資訊，如大圈距離及其初航向、頂點及過赤道點位置等，均以 NGA 的大圈航法之程式逐一確認，證實本研究的 GCS_Departure 程式之計算結果正確無誤。另該實例顯示：頂點 (37° 3.5'S, 178°32.3'E) 係在大圈航路上。

Great Circle Sailing from Departure

Departure Latitude: 33° 51.5' N S
 Departure Longitude: 151° 13' E W

Destination Latitude: 8° 53' N S
 Destination Longitude: 79° 31' E W

Alter course by:
 Equal DLo Each 10° DLo from 160° E W
 Equal GC distance Each Disable miles

Buttons: Compute, Reset, Exit

The great circle distance is 7635.1'
 The great circle initial course is 106.1° (S 73°56.6'E)
 The equator crossing point:
 (0°, 91°27.7'W)

The vertices:
 1 (37°3.5'S, 178°32.3'E)
 2 (37°3.5'N, 1°27.7'W)

The vertex 1 on the great circle track

No.	Latitude	Longitude	Course	Mercator distance
F	33°51.5'S	151°13.0'E	103.5°	447.4'
1	35°38.1'S	160° 0.0'E	88.1°	491.3'
2	36°45.1'S	170° 0.0'E	82.1°	482.2'
3	37° 3.0'S	180° 0.0'	86.1°	483.8'
4	36°30.3'S	170° 0.0'W	80.2°	496.0'

圖 6 GCS_Departure 程式操作結果 (例題 3 第 2 小題)

表 4 GCS_Departure 程式計算結果 (例題 3 第 2 小題)

The great circle distance is 7635.1'		The vertexes :		
The great circle initial course is 106.1° (S 73°56.6'E)		1. (37°3.5'S, 178°32.3'E)		
The equator crossing point: (0°, 91°27.7'W)		2. (37°3.5'N, 1°27.7'W)		
The vertex 1 on the great circle track				
No.	Latitude	Longitude	Course	Mercator distance
F	33°51.5'S	151°13.0'E	103.5°	447.4'
1	35°36.1'S	160°0.0'E	98.1°	491.3'
2	36°45.1'S	170°0.0'E	92.1°	482.2'
3	37°3.0'S	180°0.0'	86.1°	483.8'
4	36°30.3'S	170°0.0'W	80.2°	496.0'
5	35°6.0'S	160°0.0'W	74.5°	518.9'
6	32°47.2'S	150°0.0'W	69.1°	552.2'
7	29°30.4'S	140°0.0'W	64.2°	594.7'
8	25°11.8'S	130°0.0'W	60.0°	643.3'
9	19°50.3'S	120°0.0'W	56.7°	691.8'
10	13°30.1'S	110°0.0'W	54.4°	731.4'
11	6°23.8'S	100°0.0'W	53.3°	752.4'
12	1°6.2'N	90°0.0'W	53.5°	748.7'
13	8°32.0'N	80°0.0'W	54.0°	35.7'
T	8°53.0'N	79°31.0'W		
The total Mercator distance is 7669.8'				
The difference between great circle and Mercator distance is 34.6'				
Increasing rate is 0.45%				

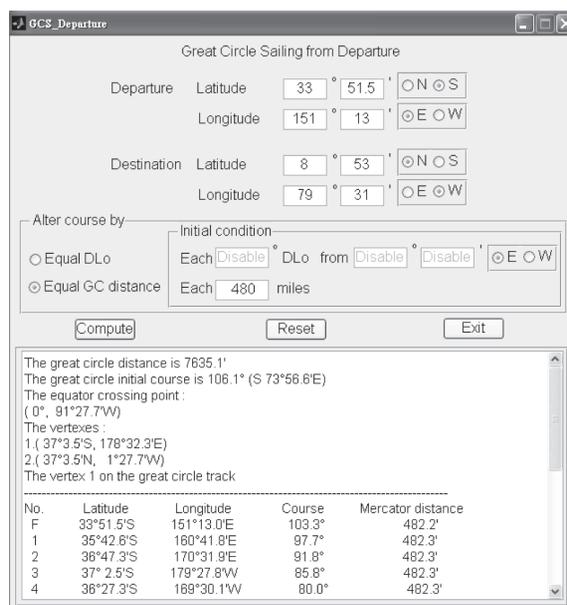


圖 7 GCS_Departure 程式操作結果 (例題 3 第 3 小題)

表 5 GCS_Departure 程式計算結果 (例題 3 第 3 小題)

The great circle distance is 7635.1'		The vertexes:		
The great circle initial course is 106.1°(S 73°56.6'E)		1. (37°3.5'S, 178°32.3'E)		
The equator crossing point: (0°, 91°27.7'W)		2. (37°3.5'N, 1°27.7'W)		
The vertex 1 on the great circle track				
No.	Latitude	Longitude	Course	Mercator distance
F	33°51.5'S	151°13.0'E	103.3°	482.2'
1	35°42.6'S	160°41.8'E	97.7°	482.3'
2	36°47.3'S	170°31.9'E	91.8°	482.3'
3	37° 2.5'S	179°27.8'W	85.8°	482.3'
4	36°27.3'S	169°30.1'W	80.0°	482.3'
5	35°3.6'S	159°47.4'W	74.6°	482.2'
6	32°55.3'S	150°29.2'W	69.7°	482.2'
7	30°7.8'S	141°41.3'W	65.4°	482.2'
8	26°47.2'S	133°25.0'W	61.8°	482.1'
9	22°59.6'S	125°39.0'W	58.9°	482.1'
10	18°50.5'S	118°19.5'W	56.6°	482.1'
11	14°25.1'S	111°22.0'W	54.9°	482.1'
12	9°48.0'S	104°41.0'W	53.8°	482.1'
13	5°3.2'S	98°11.2'W	53.2°	482.1'
14	0°14.6'S	91°47.1'W	53.2°	482.1'
15	4°34.1'N	85°23.3'W	53.7°	437.0'
T	8°53.0'N	79°31.0'W		
The total Mercator distance is 7669.5'				
The difference between great circle and Mercator distance is 34.4'				
Increasing rate is 0.45%				

3. 第 2 小題為「給經求緯」的計算情境，各轉向點及其間的麥氏航向和麥氏距離等，三者皆透過 NGA 的大圈航法與麥氏航法等兩程式，逐一檢驗，發現 GCS_Departure 程式所計算之結果均是正確。而結果分析，該段大圈航路計有 13 個轉向點，其麥氏距離總值較大圈距離理論值增加 34.6 海浬，而距離增率為 0.45%。

4. 第 3 小題則為「給大圈距離求經緯度」的計算情境，各轉向點及其間的麥氏航向和麥氏距離等，三者亦經由 NGA 的大圈航法與麥氏航法等兩程式，逐一檢查，證實 GCS_Departure 程式所計算之結果是正確的。又結果分析，該段大圈航路則總計有 15 個轉向點，其麥氏距離總值較大圈距離理論值增加 34.4 海浬，而距離增率為 0.45%。

伍、結論

航程計畫中大洋航行，在計算階段之目標為最短距離，準此，大圈航法之計算係為必要的工作；又大圈航法其實就是分段的麥氏航法，基此，其計算過程中，有許多的人工判斷再加上複雜的計算，造成航海者的困擾；在實務上，航海者偏好採用啟航點作為計算的參考基準，而其初始條件則有「給定經度求緯度」與「給定大圈距離求經緯度」等兩種計算情境；另外，由於現有的大圈航法之計算程式均不夠完整且欠缺彈性，鑑此，大圈航法之程式必須考量計算情境、輸入偵錯與彈性選項以及輸出結果分析等功能；綜合上述，從航海者觀點，本研究提出一個整合大圈方程式法及直角球三的納皮爾法則等相關公式之計算程序，以利撰寫程式，繼而採用 MATLAB[®] 程式語言內建的圖形使用者介面，成功地開發出航海者導向的大圈航法之程式，即 GCS_Departure 程式，進而透過實例證實本研究所自行開發之程式，其計算結果皆為正確；且人性化使用者介面，其不僅完整且具有彈性的選項。為提供未來研究者參考，本研究之具體結論如下述：

1. 在「給定經度求緯度」計算情境，由於大圈方程式法對求解大圈弧線上的任何一點，如頂點、過赤道點及各轉向點等，均能直接且不需判斷，以及迅速且

準確地計算獲得，故本研究以該法計算大圈弧線的基本資訊。

2. 在「給定大圈距離求經緯度」計算情境，因大圈方程式法無法計算，因此，必須借用直角球三的納皮爾法則公式計算之；該計算流程中，頂點之判別為其關鍵，本研究採用方向性的夾擊定理概念，建立了不少的判別式。
3. 在輸入偵錯部分，為避免錯誤的數值影響最終計算結果，錯誤訊息視窗之語法，會顯示錯誤訊息視窗告知，並要求重新輸入。
4. 在彈性選項部分，對話視窗之語法，可讓使用者自行決定其初始條件和選項，以滿足航海者對於彈性選項的要求。
5. 從實例確認裡，有關大圈弧線的基本資訊的輸出結果，除大圈距離及其初航向外，頂點與過赤道點等位置，現有程式均無法求得，而 GCS_Departure 程式則可迅速且準確地求得，並顯示頂點在或不在大圈航路上。
6. 實例確認中，各轉向點及其間的麥氏航向與麥氏距離，本研究的 GCS_Departure 程式可直接且準確地計算並臚列出三者之結果資訊，其含轉向點個數；另結果分析則有麥氏距離總值較大圈距離理論值的增量及其距離增率。
7. 人性化使用者介面之設計，如圖 4 示。其不僅容易操作且具有完整的功能表

現；即其彈性選項可讓使用者有更寬廣的選擇；而其輸出結果分析更讓使用者對大圈弧線及大圈航路上有更深入的了解。

參考文獻

- 李顯宏，2006，*MATLAB 7.X 介面開發與編譯技巧*，文魁資訊股份有限公司，臺北市。
- 周和平，1996，*地文航海學*，周氏兄弟出版社，臺北市。
- 洪維恩，2006，*Matlab7 程式設計*，旗標出版股份有限公司，臺北市。
- 徐正梅，1999，談地球上兩點間的球面距離，*數學傳播季刊*，第 23 卷，第 2 期，16-23。
- 陳志立、許添本、張建仁，2003，大圈航法的直接計算方法，*海運研究學刊*，第 15 期，61-76。
- 陳志立、謝宗軒、翁國祐，2007，球面三角學中四鄰公式之推導與其推論，*航運季刊*，第 16 卷，第 2 期，67-84。
- 陳志立、李彥瑤、劉思岑、蔡奇呈，2008，航海者導向的麥氏航法程式開發，*海運學報*，第 17 期，81-99。
- 郭禹，1998，*航海學*，大連海事大學出版社，中國大連。
- 張建仁、陳志立，2003，極對偶定理在大圈航法上的應用，*航運季刊*，第 12 卷，第 4 期，1-22。
- 張聖明譯，Chapman, S.J. 著，2006，*MATLAB 程式設計與應用*，全華科技圖書股份有限公司，臺北市。
- 楊籙、薩師洪，1978，*地文航海上冊*，海圖書局，臺北市。
- 薩師洪，1997，*航海學第一部領航與推算*，文笙書局，臺北市。
- Bennett, G.G., 1996. Practical rhumb line calculations on the spheroid. *The Journal of Navigation*, 49(1), 112-119.
- Bowditch, N., 1981. *American Practical Navigator Volume II*, 1981 Ed., Defense Mapping Agency Hydrographic/Topographic Center: Washington, D.C., U.S.A.
- Bowditch, N., 2002. *American Practical Navigator*, 2002 Bicentennial Ed., National Imagery and Mapping Agency: Bethesda, Maryland, U.S.A.
- Chen, C.L., 2003. *New Computational Approaches for Solving the Great Circle Sailing and Astronomical Vessel Position*, Ph.D. dissertation, National Taiwan University: Taipei, Taiwan.
- Chen, C.L., Hsu, T.P. and Chang, J.R., 2004. A novel approach to the great circle sailing: the great circle equation. *The Journal of Navigation*, 57(2), 311-320.
- Clough-Smith, J.H., 1966. *An Introduction to Spherical Trigonometry*, Brown, Son & Ferguson, Ltd., Glasgow, Scotland: U.K.

Cutler, T.J., 2004. *Dutton's Nautical Navigation*, 15th Ed., Naval Institute Press, Annapolis, Maryland: U.S.A.

Hohenkerk, C.Y. and Yallop, B.D., 2004. *NavPac*, Version 2.1.2, Council for the Central Laboratory of the Research Councils, Taunton, Somerset: U. K.

Maloney, E.S., 1985. *Dutton's Navigation and Piloting*, 13th Ed., Naval Institute Press, Annapolis, Maryland: U.S.A.

National Geospatial-Intelligence Agency,

Retrieved Nov 11, 2010a from GCS and MS website: (http://msi.nga.mil/NGAPortal/MSI.portal?_nfpb=true&_pageLabel=msi_portal_page_145&calcCode=05).

National Geospatial-Intelligence Agency, Retrieved Nov 11, 2010b from WGS 84 Earth Gravitational Model, website: (<http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm96/egm96.html>).

Reis, O., 2006. *Navigator*, version 4.5 build 151, Celestaire, Wichita, Kansas: U.S.A.

附錄：本文使用的符號及其定義或說明表

符號	定義或說明
F, T	F 為啟航點；T 是到達點
P_{nr}	近極點；與 F 緯度同名之極點
V, V ₁ , V ₂	大圈弧線之頂點有二，與 F 較近者為 V ₁ ；另一則為 V ₂
E, E ₁ , E ₂	大圈弧線之過赤道點有二，與 F 較近者為 E ₁ ；另一則為 E ₂
X _i	各轉向點
L _F , L _T , L _V , L _{X_i}	L _F 為 F 緯度；L _T 為 T 緯度；L _V 為 V 緯度；L _{X_i} 為 X _i 緯度
λ _F , λ _T , λ _V , λ _E , λ _{X_i}	λ _F 為 F 經度；λ _T 為 T 經度；λ _V 為 V 經度；λ _E 為 E 經度；λ _{X_i} 為 X _i 經度
DLo, DLo _{FV₁} , DLo _{VX_i} , DLo _{FE₁} , DLo _{FX_i} , DLo _{XX}	DLo 為 F 至 T 經度差；DLo _{FV₁} 為 F 至 V ₁ 經度差；DLo _{VX_i} 為 V 至 X _i 經度差；DLo _{FE₁} 為 F 至 E ₁ 經度差；DLo _{FX_i} 為 F 至 X _i 經度差；DLo _{XX} 為定值的經度差
Dg, D _{FV} , D _{FX_i} , D _{VX_i} , D _{XX}	Dg 為 F 至 T 大圈距離；D _{FV} 為 F 至 V 大圈距離；D _{FX_i} 為 F 至 X _i 大圈距離；D _{VX_i} 為 V 至 X _i 大圈距離；D _{XX} 為定值的大圈距離
C, C _n	C 為大圈初航向角；C _n 為大圈初航向
a, b, c	大圈方程式參數
a _e , e	a _e 為赤道 1 分弧所表示的數值；e 為地球偏心率
dlo, ℓ	dlo 為麥氏航路上兩點的經度差；ℓ 則是緯度差
M, m	M 為緯度漸長比數單位；m 則為緯度漸長比數差
C _m , C _{mn}	C _m 為麥氏航路上兩點的麥氏航向角；C _{mn} 則是麥氏航向
dm	各轉向點間的麥氏距離