

航海測天解算表之程式開發¹

The Program Development of the Sight Reduction Tables for Marine Navigation

陳志立 Chih-Li Chen²

謝宗軒 Tsung-Hsuan Hsieh³

劉思岑 Szu-Tsen Liu³

摘要

截距法是目前測天解算法的主要方法，在早期尚未發明計算器時，為了處理截距法的計算問題，一般使用航海測天解算表作為計算工具。然而，在縮減表冊及內插修正的製表目標下，該表有其限制與誤差；此外，當天體位於觀測者天頂時之特例，其表列方位為 90° ，容易造成初學者的混淆。本文首先探討航海測天解算表的製表公式及三種查表解算方式，並針對天體位於上、下中天時之特例，詳加說明，進而採用其製表公式開發出航海測天解算程式。此自行開發程式均透過例題確認無誤，且在特例時會顯示警告視窗，大幅改善了航海測天解算表的表達方式。

關鍵字：截距法、航海測天解算表、航海測天解算程式。

ABSTRACT

The intercept method is mainly adopted in the field of sight reduction. Before the calculator had not been developed, navigators usually used the sight reduction tables as a tool to solve the calculating problem of the intercept method. However, the sight reduction tables are proposed for the purpose of compressing tables and tabular interpolation such that they always lead to inaccuracy of the results or limitation of their further applications. Besides, when the special case that the celestial body is above the zenith is encountered, the degree of azimuth is 90 shown in tables and it usually confuses the beginner. In this article, we do not only discuss the formulae of sight reduction tables and solve problems by consulting tables, but

¹ 本文為行政院國家科學委員會專題研究計畫（編號：NSC 96-2628-E-019-022-MY3）之部份成果，承蒙補助特此致謝。

² 國立台灣海洋大學商船學系 副教授（聯絡地址：20224 基隆市中正區北寧路二號；E-mail: clchen@mail.ntou.edu.tw；電話：2462-2192 轉 3029）。

³ 國立台灣海洋大學商船學系所 碩士。

also illustrate the judgment of azimuth when the celestial body is above the zenith. Finally, the formulae are adopted to develop a sight reduction program for marine navigation. This self-developed program is validated with several examples in artificial process. Further more, the error and warning message can automatically appear in the special case and the program greatly improves expressions of the sight reduction tables.

Keywords: Intercept method, the sight reduction tables for marine navigation, the sight reduction program for marine navigation.

壹、緒論

天文觀測定位(astronomical vessel position, AVP)即使用六分儀(sextant)觀測天體高度，並記錄觀測時間，當擁有兩筆以上資料，再透過測天解算法(sight reduction method)如高高度觀測法(high-altitude observation, HAO)、截距法(intercept method, IM)及球面三角法(spherical triangle method, STM)等，直接圖解、計算暨圖解及直接計算以決定觀測船位^[3,6,7,8]，其中，截距法為目前海事教育或訓練中主要的測天解算法。截距法的基本構思係在推算船位(dead reckoning, DR)附近取一點為假設位置(assumed position, AP)，去求得計算高度(computed altitude, H_c)與天體方位角(azimuth angle, Z)，進而比較計算高度(H_c)與觀測高度(H_o)，此差值即為截距或稱為高度差(intercept or altitude difference, a)。而有了假設位置(AP)、天體方位(azimuth, Z_n)和截距(a)，即可依此三要素繪製天文位置線(line of position, LOP)^[3,6,8]。

在早期尚未發明計算器時，為了處理截距法的計算問題，一般使用航海測天解算表冊(sight reduction tables for marine navigation, Pub.No.229, 簡稱 229 表)^[9]作為主要的計算工具，直至今日，國際間海事教育或實務訓練亦然。但是，229 表在縮減表冊的考量下，限制其查表引數必須皆為整度數，亦即以假設位置取代推算船位。此外，為了維持計算準確度，229 表僅針對赤緯為非整度數時建構內插表(interpolation table)；當查表引數皆為非整度數時，則設計一套求解過程相當繁瑣的特殊技巧。簡言之，229 表係依據縮減表冊及內插修正的製表目標所建構，實際上有其限制與誤差。

從嚴謹學理來分析截距法，其本質即是一個嘗試錯誤法(trial-and-error

method)^[10]，假設位置的選擇對所求得天文觀測船位影響很大；鑑此，回到問題起初，是否有可能直接使用推算船位作為假設位置的截距法呢？事實上，答案是肯定地，因為在現今個人電腦普遍使用的年代，透過電腦運算不僅能提昇解算速度，且避免表冊本身的限制與誤差，以及人為查表計算所造成的錯誤。據此，引發吾人使用程式語言開發航海測天解算程式(the sight reduction program for marine navigation, 命名為 Pub229pro)之動機，迅速簡便地獲得計算結果。

本文除前言外，後續章節安排如下：第二章說明 229 表之製表公式及其查表解算方式，並分析在上、下中天時的天體方位；進而，在第三章使用 MATLAB[®] 程式語言開發航海測天解算程式；繼而，於第四章以例題驗證本文所開發的程式；最後，於第五章提出結論。

貳、航海測天解算表之探討

截距法的解算流程如圖 1 所示。首先說明 229 表之製表公式，接著依查表引數的不同，分別闡述三種查表解算方式，最後，分析在中天時的天體方位。

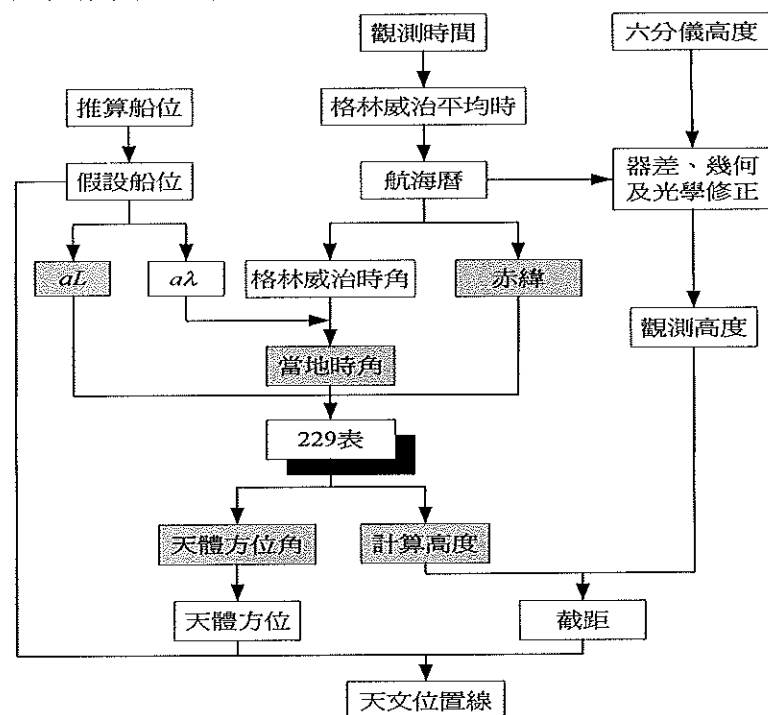


圖 1 截距法之解算流程圖

2.1 製表公式

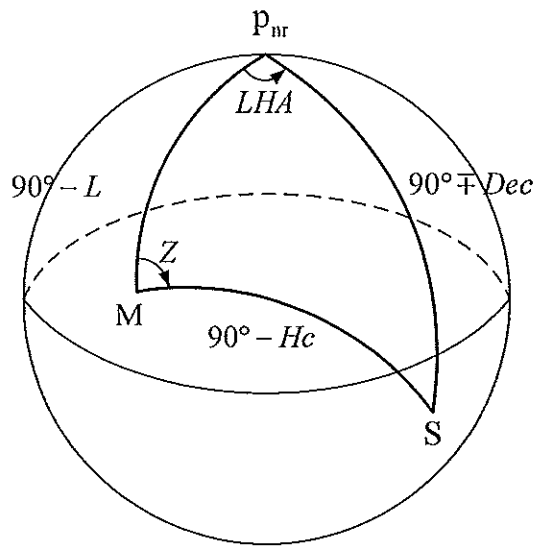


圖 2 計算球面三角示意圖

回到起初來探討截距法的計算問題，其球面三角形如圖 2 所示，在已知推算船位的緯度(L)、天體赤緯(declination, Dec)及當地時角(local hour angle, LHA)之情況下，欲求得天體的計算高度與方位角，求解公式有餘弦加半正矢公式(cosine-haversine equations)、典型方程組(classic equation)、邊餘弦加四鄰公式(cosine-four parts equations)及納皮爾法則(Napier's rule)等。若考量最小誤差傳播與簡單性，則最佳公式分別是邊餘弦律及四鄰公式^[4]，其公式如下：

$$\sin Hc = \sin(L) \cdot \sin(\pm Dec) + \cos(L) \cdot \cos(\pm Dec) \cdot \cos LHA \quad (1)$$

$$\tan Z = \frac{\cos d \cdot \sin LHA}{[\cos(L) \cdot \sin(\pm Dec)] - [\sin(L) \cdot \cos(\pm Dec) \cdot \cos LHA]} \quad (2)$$

其中， L ：船位的緯度； Dec ：赤緯，其正負號判定為與 L 同名取正值，反之取負值； LHA ：當地時角； Hc ：計算高度； Z ：天體方位角。

2.2 查表解算方式

1. 查表引數皆為整度數

229 表在縮減表冊的考量下，限制查表引數皆為整度數，亦即以假設位置 (AP) 取代推算船位 (DR)。當假設位置的緯度與赤緯同名時，列於 229 表左面頁及右面頁下方；而緯度與赤緯異名時，則列於右面頁上方，其表列高度 (H_t) 與表列方位角 (Z_t) 即為計算高度 (H_c) 與天體方位角 (Z)。然而，當查表引數跨越異名同名線 (contrary-same line) 時，則計算高度與天體方位角須經轉換，如下所示：

$$H_c = -H_t \quad (3)$$

$$Z = 180^\circ - Z_t \quad (4)$$

其中， H_t ：表列高度； H_c ：計算高度； Z_t ：表列方位； Z ：天體方位角。

2. 赤緯為非整度數

為了維持查表結果的準確度，229 表僅針對赤緯為非整度數時，即採用赤緯增量 (d)，來建構內插表，故該法亦稱為 d only 法。經查閱位於封面頁或封底頁的內插表後，可分別獲得高度修正量 ($H_t \text{ corr.}$) 與方位角修正量 ($Z_t \text{ corr.}$)，進而，求得計算高度與天體方位角。然而，內插表係採線性內插的方式所建構，但高度與方位角的獲得卻是屬於三角函數之關係式，因此當計算高度大於 60° 時，其修正結果仍存在著誤差。

3. 查表引數皆為非整度數

當查表引數皆為非整度數時，即直接以推算船位 (DR) 計算，229 表設計一套特別技巧：採用羅經差法 (compass error method) 修正天體方位角；另外使用圖解法 (graphical method) 修正計算高度。求解過程分別說明如下：

(1) 羅經差法修正天體方位角

經由三次線性內插，計算求得方位角之總修正量。如表 1 所示，其步驟整理如下：

步驟 1：分別採最接近查表引數之整度數為基本引數(base arguments)，並依基本引數查得基本方位角(Z_{base})。

步驟 2：用偏微分的觀念，分別固定任二個基本引數，並增加或減少第三個基本引數 1° 時，可查得表列方位角(Z_{tab})。查表引數與基本引數之增減差量，稱為增量(increments, Inc)。

步驟 3：方位角差(azimuth angle difference, $Z Diff.$)為表列方位角與基本方位角之差值，即：

$$Z Diff. = Z_{tab} - Z_{base} \quad (5)$$

其中， Z_{tab} ：表列方位角； Z_{base} ：基本方位角； $Z Diff.$ ：方位角差。

步驟 4：依方位差與增量，分別計算方位角修正量(correction, $Corr.$)，四捨五入取至小數點下一位。內插公式為：

$$Z Corr. = Z Diff. \times \frac{Inc.}{60'} \quad (6)$$

其中， $Z Diff.$ ：方位角差； $Inc.$ ：增量； $Z Corr.$ ：方位角修正量。

步驟 5：加總各方位角修正量，以修正基本方位角，即可求得天體方位(Zn)。

表 1 羅經差修正表

actual	base argument	Z_{base}	Z_{tab}	$Z Diff.$	Increment	Correction
<i>Lat</i>					<i>Lat Inc.</i>	
<i>Dec</i>	(S/C)				<i>Dec Inc.</i>	
<i>LHA</i>					<i>LHA Inc.</i>	
Z_{base}					<i>Total Corr.</i>	
<i>Corr.</i>						
<i>Z</i>						
<i>Zn</i>						

資料來源：[9]

(2) 圖解法修正計算高度

在一般實務上，圖解法係以空白的麥氏圖紙來作圖，作法如圖 3 所示。作圖程序整理如下：

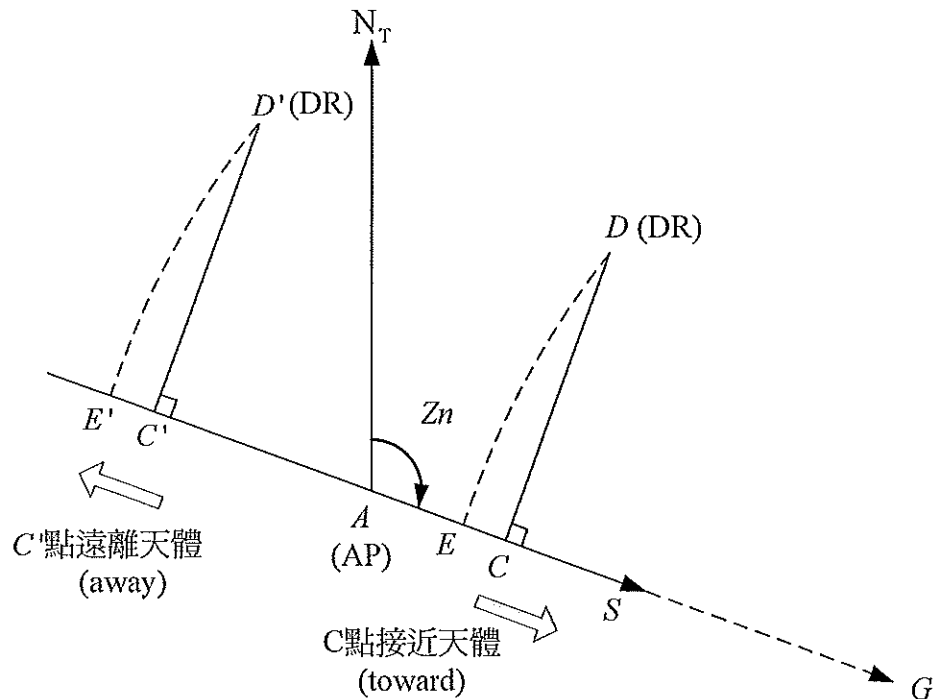


圖 3 圖解法修正計算高度示意圖

步驟 1：依假設位置(AP)採用 229 表 d only 法，求得計算高度(H_d)。

步驟2：以AP(A點)及羅經差法求得的天體方位(Z_n)作方位線($\overline{AS}$)。

步驟3：由DR(D點或D'點)作方位線之垂線，交於C點或C'點。

步驟4：量測 DR 至方位線的垂直距離，即 $\overline{DC}$ 或 $\overline{D'C'}$ ，並量測 $\overline{AC}$ 或 $\overline{AC'}$ 。

步驟5: 依 H_1 及 $\overline{DC}$ (或 $\overline{D'C'}$), 查 229 表中, 頁 xvi 的偏移量表(table of offsets),

可得偏移量($\overline{EC}$)。

步驟6：求DR的圖解計算高度(H_D)，其公式為：

$$H_D = H_A + AC - EC \quad \text{或} \quad H_D = H_A - AC' - E'C' \quad (7)$$

C 點接近(toward)天體，則 AC 取正；而 C' 點遠離(away)天體，則 AC' 取負。

2.3 天體在中天時之方位

觀察式(2)可發現，當 LHA 為 0° (上中天)或 180° (下中天)時，即式 $\sin LHA = 0$ 時，則 $Z = 0$ ，將無法判定方位。據此，吾人透過天子午線平面圖 (the plane of the celestial meridian)，分析天體在不同赤緯，上中天與下中天時的方位，如圖 4 及圖 5 所示。另外，將圖 4 及圖 5 中，天體上中天時之各點 (ds_1 , ds_2 , ds_3 , dc_1 , dc_2 , dc_3) 及下中天時之各點 ($d's_1$, $d's_2$, $d's_3$, $d'c_1$, $d'c_2$, $d'c_3$) 的天體方位彙整於表 2。

以圖 4 為例，假設觀測者緯度為北緯 30° ，那麼天體赤緯與觀測者緯度之關係，其對天體上中天時之方位有下列情況：

1. 天體赤緯與觀測者緯度異名時，天體(圖中 dc_1 , dc_2 和 dc_3 等 3 點)方位為正南(180°)。
2. 天體赤緯小於觀測者緯度且同名時，天體(圖中 ds_1 點)方位亦為正南(180°)。
3. 天體赤緯大於觀測者緯度且同名時，天體(圖中 ds_3 點)方位為正北(0°)。
4. 天體赤緯等於觀測者緯度且同名時，即天體恰於觀測者之天頂(zenith, Zc)，天體(圖中 ds_2 點)方位為無法判定或全方位。

值得注意的是上述第四種情況，其在 229 表的表列方位(Z)為 90° ，該特例雖然在表冊中，頁 xxv 說明，此時天體方位為無法判定(indeterminate)，而表列值係以 90° 或前值(the preceding value)之半表示，藉以瞭解其變化趨勢，然對於無天文航海基本概念者，易造成其混淆。據此，為確保本文開發的航海測天解算程式之完整性，在天體恰於觀測者天頂時，設計警告視窗，加以提示，該特例之天體方位為無法判定，本文將於例題 4 中舉例說明。

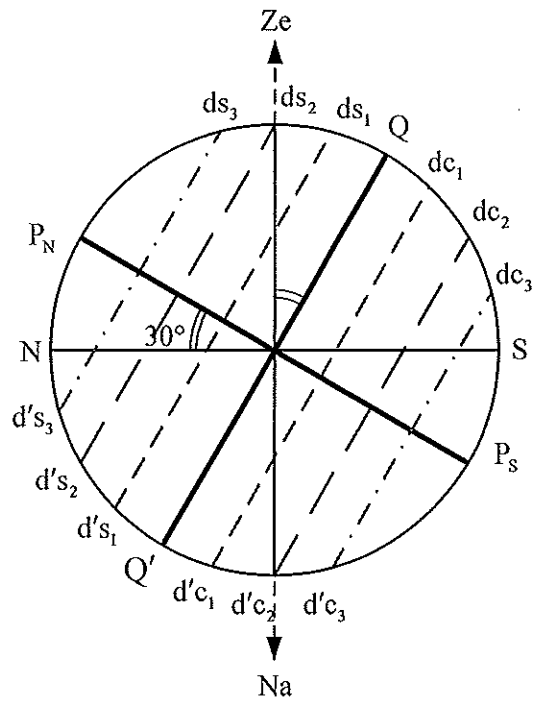


圖 4 觀測者緯度位於北緯 30 度之分析圖

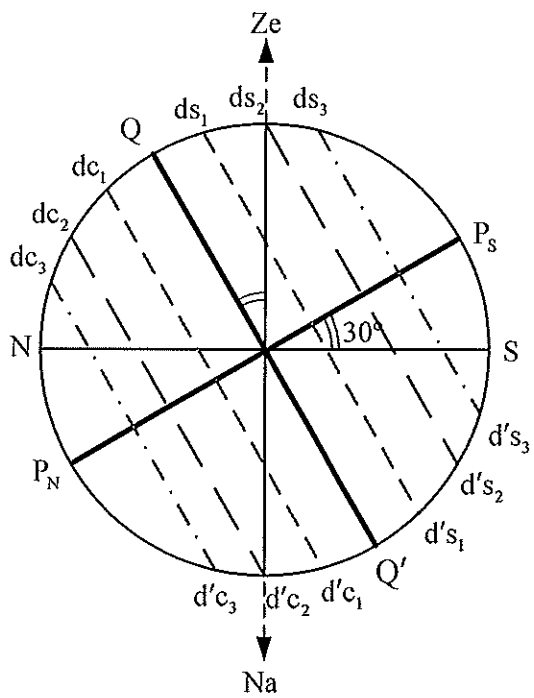


圖 5 觀測者緯度位於南緯 30 度之分析圖

表 2 中天時之天體方位

		$Dec < Lat$		$Dec = Lat$		$Dec > Lat$	
$Lat\ N$	$LHA = 0^\circ$	ds_1	$Zn = 180^\circ$	ds_2	$Zn = 0^\circ \sim 360^\circ$	ds_3	$Zn = 0^\circ$
Dec	$LHA = 180^\circ$	$d's_1$	$Zn = 0^\circ$	$d's_2$	$Zn = 0^\circ$	$d's_3$	$Zn = 0^\circ$
$Lat\ N$	$LHA = 0^\circ$	dc_1	$Zn = 180^\circ$	dc_2	$Zn = 180^\circ$	dc_3	$Zn = 180^\circ$
Dec	$LHA = 180^\circ$	$d'c_1$	$Zn = 0^\circ$	$d'c_2$	$Zn = 0^\circ \sim 360^\circ$	$d'c_3$	$Zn = 180^\circ$
$Lat\ S$	$LHA = 0^\circ$	ds_1	$Zn = 0^\circ$	ds_2	$Zn = 0^\circ \sim 360^\circ$	ds_3	$Zn = 180^\circ$
Dec	$LHA = 180^\circ$	$d's_1$	$Zn = 180^\circ$	$d's_2$	$Zn = 180^\circ$	$d's_3$	$Zn = 180^\circ$
$Lat\ S$	$LHA = 0^\circ$	dc_1	$Zn = 0^\circ$	dc_2	$Zn = 0^\circ$	dc_3	$Zn = 0^\circ$
Dec	$LHA = 180^\circ$	$d'c_1$	$Zn = 180^\circ$	$d'c_2$	$Zn = 0^\circ \sim 360^\circ$	$d'c_3$	$Zn = 0^\circ$

註：天體恰於觀測者天頂或天底時，方位應為無法判定。

參、航海測天解算表之程式開發

本文使用 MATLAB[®]程式語言做為程式開發的工具，其原因在於計算公式常涉及角度(degree)與徑度(radian)相互轉換與反三角函數等問題，而 MATLAB[®]程式語言的優點即在於處理數學運算之能力與語法的簡便。此外，MATLAB[®]程式語言可開發使用者圖形化介面(graphic user interface, GUI)，大大縮短人機距離，並增加程式的可用性^[1, 2, 5]。

本章以 229 表之製表公式為基礎，開發航海測天解算程式(Pub229pro)，其使用者圖形介面之外觀如圖 6 所示，而開發流程則如圖 7 所示。

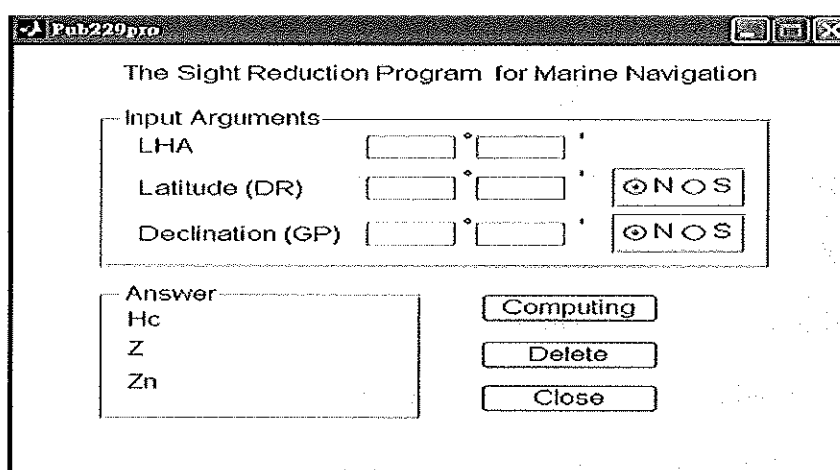


圖 6 航海測天解算程式之使用者圖形介面

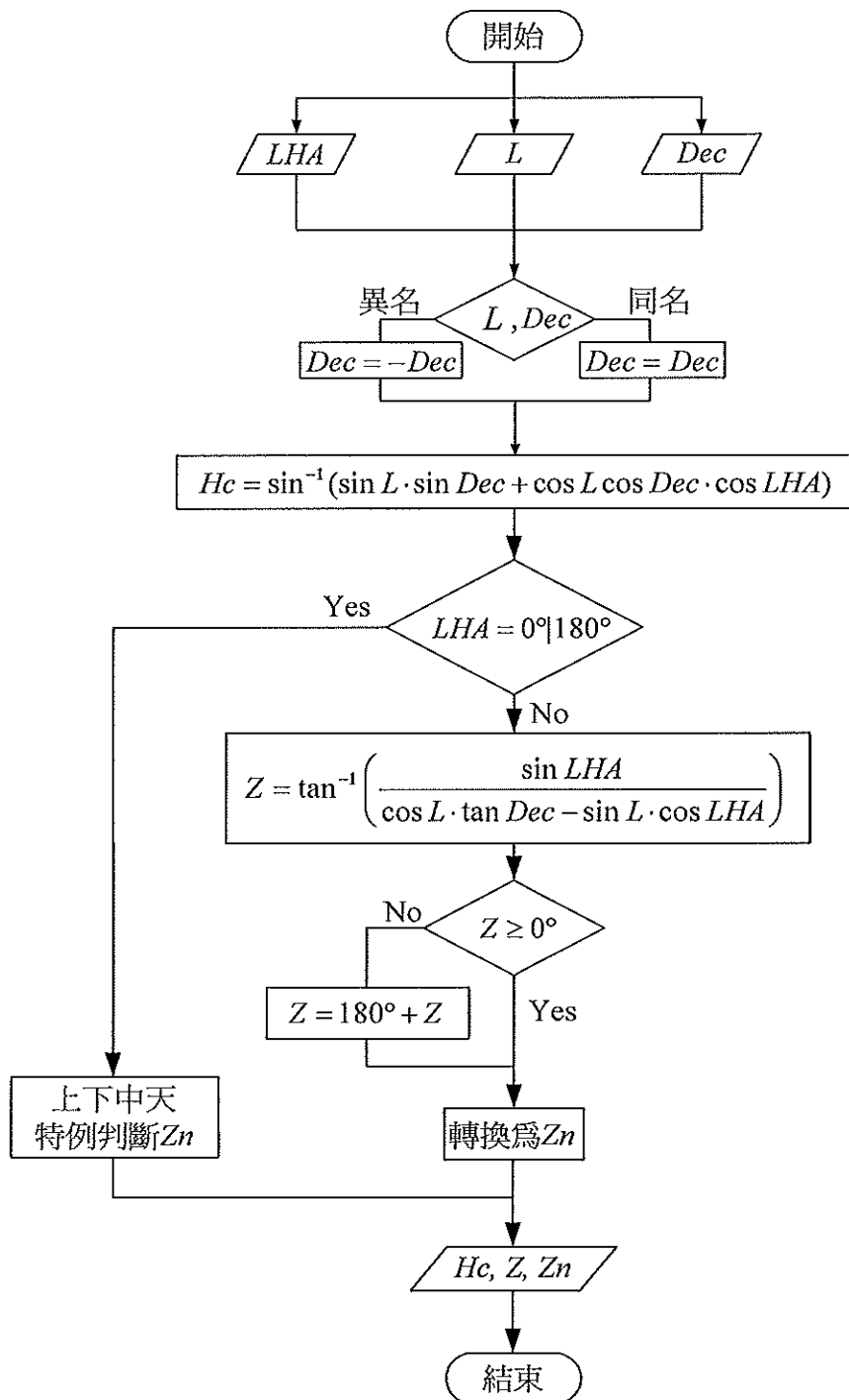


圖 7 航海測天解算程式之流程圖

肆、例題驗證

例題 1：查表引數皆為整度數

[問題]

已知 $LHA : 60^\circ$ 、 $Lat : 32^\circ N$ 、 $Dec : 20^\circ S$ ，求計算高度與天體方位角。

[方法]

1. 查閱 229 表。
2. 使用 Pub229pro。

[結果]

1. 查閱 229 表，求得計算高度為 $12^\circ 32.7'$ ，天體方位角為 123.5° 。
2. 使用 Pub229pro，求得計算高度為 $12^\circ 32.7'$ ，天體方位角為 123.5° ，操作結果如圖 8 所示。

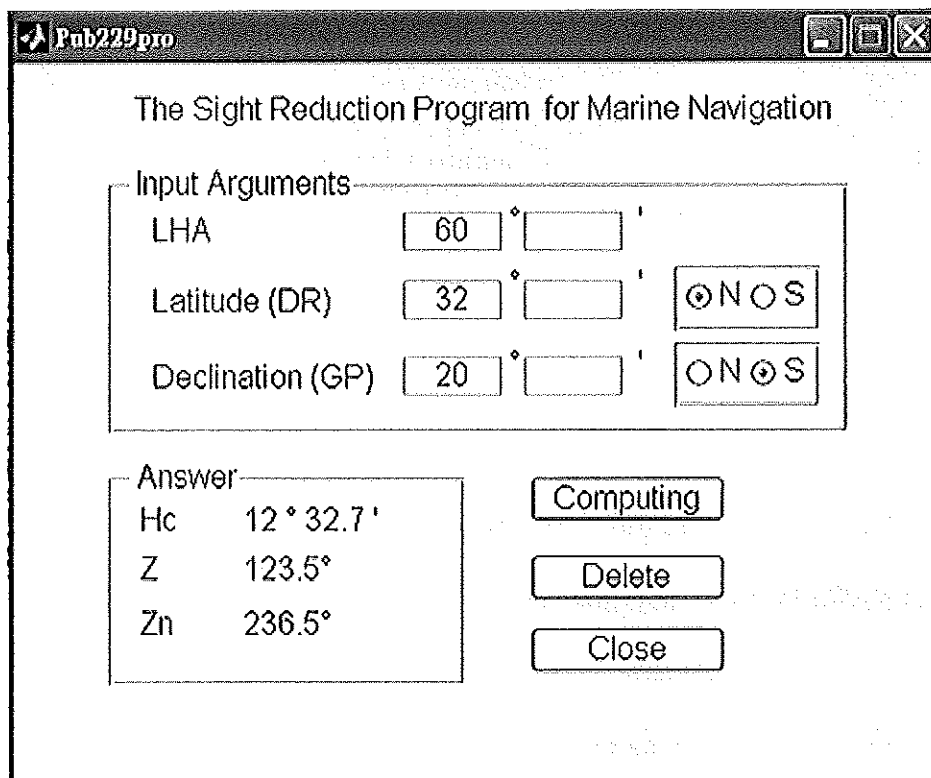


圖 8 航海測天解算程式之操作結果(例題 1)

例題 2：赤緯為非整度數

[問題]

已知 $LHA : 58^\circ$ 、 $Lat : 42^\circ N$ 、 $Dec : 10^\circ 47.5' N$ ，求計算高度與天體方位角。

[方法]

1. 查閱 229 表，並使用 d only 法。
2. 使用 Pub229pro。

[結果]

1. 查閱 229 表，求得計算高度為 $30^\circ 48.3'$ ，天體方位角為 104.1° ，解算過程如表 3 所示。
2. 使用 Pub229pro，求得計算高度為 $30^\circ 48.3'$ ，天體方位角為 104.1° ，操作結果如圖 9 所示。

表 3 使用 229 表 d only 法求計算高度與天體方位角

LHA	58°
Lat	$42^\circ N$
Dec	$10^\circ 47.5' N$
ht	$30^\circ 16.0' \quad d (+) 40.8'$
corr. for $40'$ of d	$(+) 31.7'$
corr. for $0.8'$ of d	$(+) 0.6'$
Hc	$30^\circ 48.3'$
Zt	$104.8^\circ \quad Zd (-) 0.9^\circ$
Corr.	$(-) 0.7^\circ$
Z	$N104.1^\circ W$
Zn	255.9°

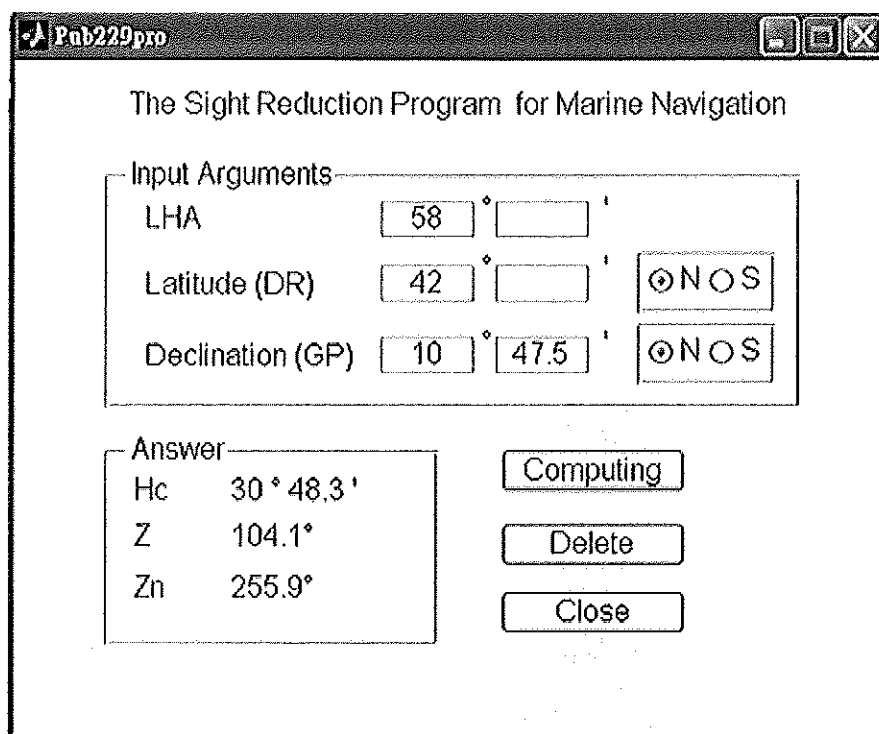


圖 9 航海測天解算程式之操作結果(例題 2)

例題 3：查表引數皆為非整度數

問題

已知 $LHA : 114^{\circ}24.3'$ 、 $Lat : 41^{\circ}34.8'N$ 、 $Dec : 45^{\circ}58.4'N$ ，求計算高度與天體方位角。^[3]

[方法]

1. 查閱 229 表，並使用特別技巧。
2. 使用 Pub229pro。

[結果]

1. 由羅經差法，求得天體方位為 319° ，如表 4 所示。而採 229 表 d only 法，求得計算高度為 $15^\circ 43.5'$ ，如表 5 所示。繼而採用圖解法，量測出 $\overline{DC'} = 3.3'$ ， $\overline{AC'} = 30.8'$ ，如圖 10 所示。另依 H_4 及 $\overline{DC'}$ ，查閱 229 表內

的偏移量表，得偏移量， $\overline{EC'}=0.0'$ 。根據上述條件，又 C' 遠離(away)天體， AC' 取負，求得圖解計算高度， $H_D=15^\circ 12.7'$ ，計算式如下：

$$H_D = H_A - AC' - EC' = 15^\circ 43.5' - 30.8' - 0.0' = 15^\circ 12.7'$$

2. 使用航海測天解算程式(Pub229pro)，求得計算高度為 $15^\circ 12.7'$ ，天體方位為 319° ，操作結果如圖 11 所示。

表 4 使用羅經差法修正天體方位(例題 3)

actual		base Argument	Z_{base}	Z_{tab}	Z Diff.	Increment	Correction
<i>Lat</i>	41°34.8' N	42° N	41.2°	41.1°	-0.1°	25.2'	0°
<i>Dec</i>	45°58.4' N	46° N (S)	41.2°	42.0°	0.8°	1.6'	0°
<i>LHA</i>	114°24.3'	114°	41.2°	40.7°	-0.5°	24.3'	-0.2°
						<i>Total Corr.</i>	-0.2°
						base Z	41.2°
						Z	N 41° W
						Zn	319°

表 5 使用 229 表 d only 法求計算高度與天體方位(例題 3)

<i>LHA</i>	114°
<i>Lat</i>	42° N
<i>Dec</i>	45°58.4' N
<i>ht</i>	15°02.1' d (+) 42.6'
corr. for 40' of d	(+) 38.9'
corr. for 2.6' of d	(+) 2.5'
<i>Hc</i>	15°43.5'
<i>Zt</i>	42.0° Zd (-) 0.8°
corr.	(-) 0.8°
Z	N 41.2° W
Zn	318.8°

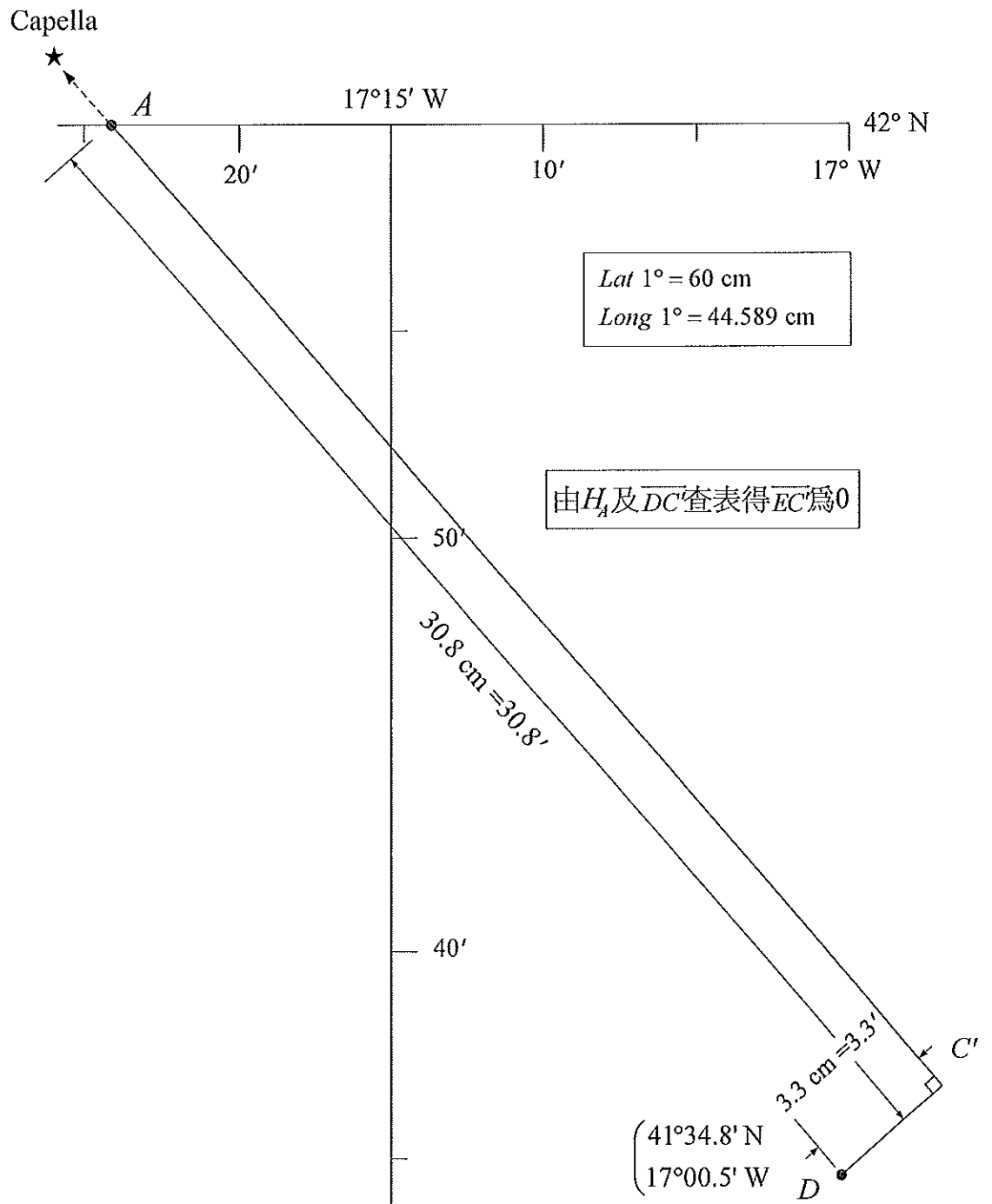


圖 10 使用圖解法修正計算高度示意圖(例題 3)

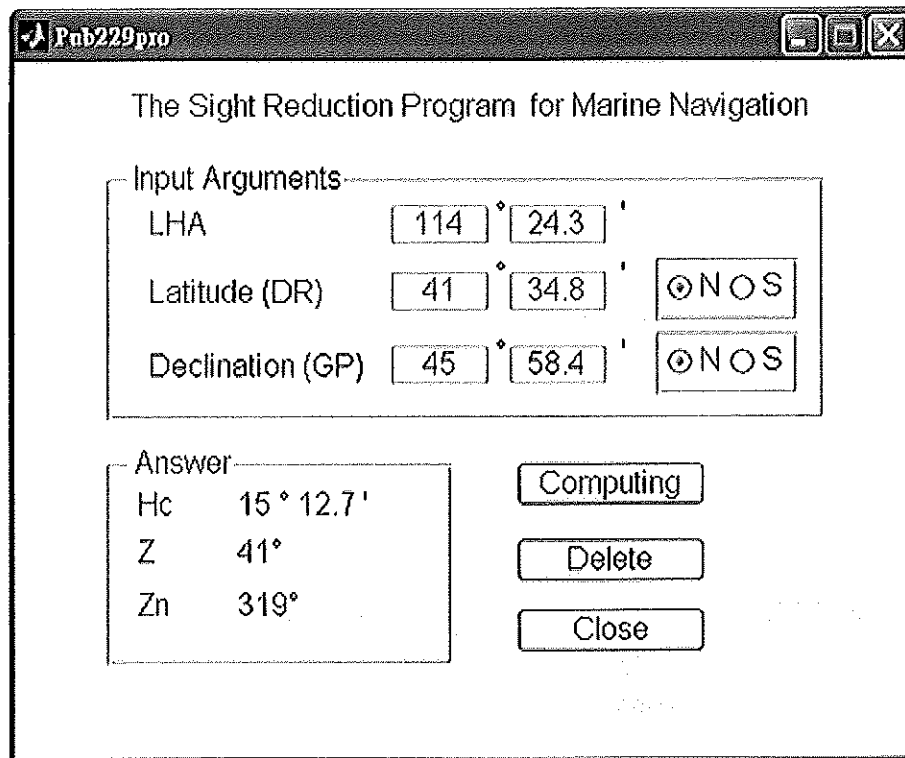


圖 11 航海測天解算程式之操作結果(例題 3)

例題 4：天體恰於觀測者天頂

[問題]

已知 $LHA : 0^\circ$ 、 $Lat : 30^\circ N$ 、 $Dec : 30^\circ N$ ，求計算高度與天體方位。

[方法]

1. 查閱 229 表。
2. 使用 Pub229pro。

[結果]

1. 查閱 229 表，求得計算高度為 90° ，天體方位為 90° 。
2. 使用 Pub229pro，求得計算高度為 90° ，天體方位為 $0^\circ \square 360^\circ$ ，並顯示天體方位無法判定的警告視窗，操作結果如圖 12 所示。

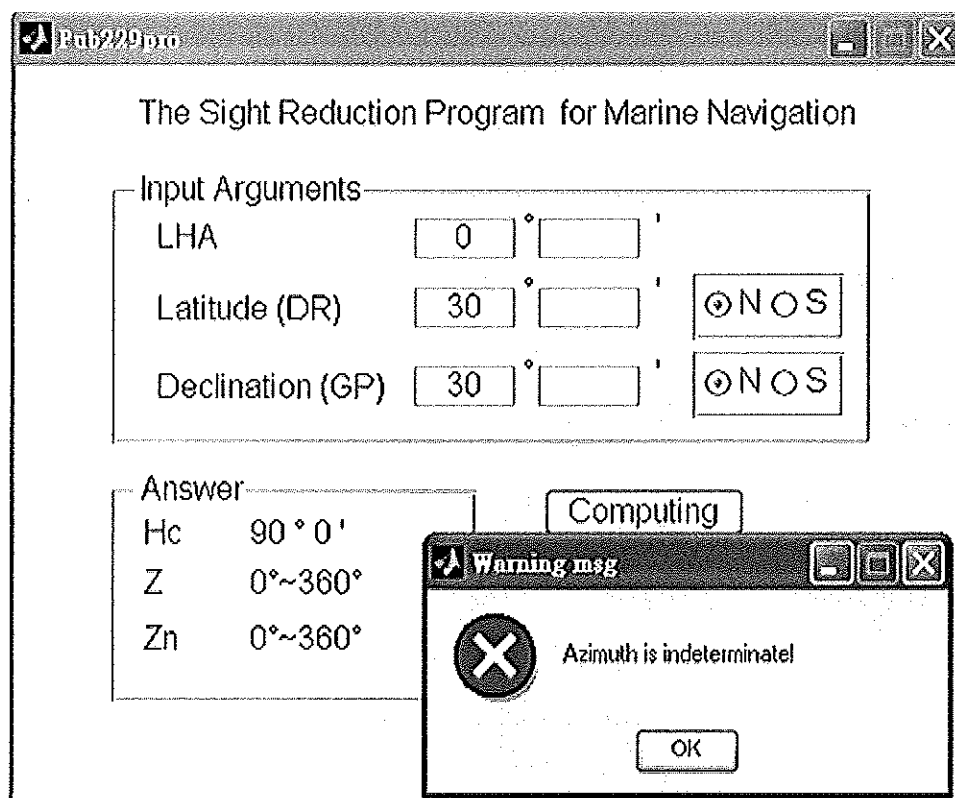


圖 12 航海測天解算程式之操作結果(例題 4)

由例題 1、例題 2 及例題 3 可發現，不論輸入引數為整度數與否，使用 229 表與 Pub229pro 的結果完全相同，驗證本文所開發的程式其計算結果正確無誤。另外，例題 4 為天體恰於觀測者天頂之情境，Pub229pro 顯示天體方位為無法判定，並出現警告視窗，藉以提醒初學者。

伍、結論

本文採用航海測天解算表之製表公式，開發航海測天解算程式 (Pub229pro)，可直接以推算船位計算，不再受限於表冊，且避免了表冊內插修正所造成的誤差，並改善人工查閱表冊繁瑣費時的缺憾。此外，當天體恰位於觀測者天頂之特例時，天體方位應為無法判定，為了航海測天解算程式的完整性，本研究自行開發程式特為此加入警告視窗，藉以改善航海測天解算表的表達方式。

陸、參考文獻

1. 李顯宏, “Matlab 7.X 介面開發與編譯技巧”, 文魁資訊股份有限公司, 台北, 1996 年。
2. 洪維恩, “Matlab7 程式設計”, 旗標出版股份有限公司, 台北, 2006 年。
3. 陳志立、張建仁, “天文觀測定位之演進及其省思”, 2006 海洋文化研討會, 國立台灣海洋大學, 頁 1-24, 2006 年。
4. 陳志立、謝宗軒、翁國祐, “球面三角學中四鄰公式之推導與其推論”, 航運季刊, 第 16 卷, 第二期, 頁 67-84, 2007 年。
5. Chapman, S. J. 著, 張聖明譯, “MATLAB 程式設計與應用”, 全華科技圖書股份有限公司, 台北, 2006 年。
6. Bowditch, N., “American Practical Navigator”, National Imagery and Mapping Agency, Washington, DC, 2002.
7. Clough-Smith, J. H., “An Introduction to Spherical Trigonometry”, Brown, Son & Ferguson Ltd, Cardiff, Cardiff, 1966.
8. Maloney, E.S., “Dutton’s Navigation and Piloting”, Naval Institute Press, Annapolis, Maryland, 1985.
9. “Sight Reduction Tables for Marine Navigation (Pub. No. 229)”, National Imagery and Mapping Agency, Washington, 1981.
10. Van Allen, J. A., “An Analytical Solution of the Two Star Sight Problem of Celestial Navigation”, *NAVIGATION: Journal of Institute of Navigation*, Vol. 28, No. 1, pp. 40-43, 1981.