航　運　季　刊
第十六卷　第二期
民國九十六年六月
頁 67　　頁 84

Maritime Quarterly
Vol. 16 No. 2
June 2007
pp. 67~84

球面三角學中四鄰公式之推導與其推論

The Derivations of the Four-Part Formulae and Its Inference in Spherical Trigonometry

陳志立 Chih-Li Chen[1]

謝宗軒 Tsung-Hsuan Hsieh[2]

翁國祐 Guo-Yu Weng[2]

摘要

四鄰公式為環繞球面三角的兩邊及兩角關係式。事實上，在誤差傳播為零的評估準則下，四鄰公式分別為大圈航法計算程序中求解大圈初航向角與天文觀測船位計算程序中求解天體方位角等的最佳公式。四鄰公式在航海學上有其重要性，然相關文獻卻很少論述它。本文從幾何、代數及向量等不同觀點推導四鄰公式，並進而直接推論特殊球面三角中納皮爾法則二的公式。

關鍵詞：四鄰公式、球面三角、納皮爾法則

ABSTRACT

The four-part formula gives the relation between two angles and the two sides adjacent to them around the spherical triangle. In the fact, the four-part formula, based on the evaluating criteria of zero error propagation in steps of procedures, is optimal formula for solving initial course angle in great circle sailing problem and for solving azimuth angle in astronomical vessel position problem, respectively. Although the four-part formula is very important in application of navigation but litter attention has been given to the point in related literature. In this article, respectively derive the four-part formulae from geometry, algebra and vector viewpoints and then use it to directly infer formulae of Napier’s rule 2 of special spherical triangle.

Keywords: Four-part formulae, Spherical triangle, Napier’s rule.

[1] 國立台灣海洋大學商船學系　助理教授 (聯絡地址：20224 基隆市中正區北寧路二號；E-mail：clchen@mail.ntou.edu.tw；電話：2462-2192 轉 3029)。
[2] 國立台灣海洋大學商船學系　碩士班研究生。

壹、前言

球面三角學(spherical trigonometry)主要在探討球面三角中，三個邊及三個角等六個變數彼此間的關係，其基本公式則為四個變數所組成，據此，共可獲得十五組關係式，分別為正弦律(sine law)、餘弦律(cosine law)與四鄰公式(four-part formulae)。正弦律及餘弦律在球面三角學中被視為基因碼(genetic code)[1]並于相關文獻中廣為探討，相較下，卻很少論述四鄰公式[1,2,3,4,5,6,7]。然而事實上，在誤差傳播為零的評估準則下，四鄰公式分別是大圈航法計算程序中計算大圈初航向角，與天文觀測船位計算程序中計算天體方位角等的最佳公式。天文航海學中著名的航海測天解算表冊(Sight Reduction Tables for Marine Navigation; Pub.No.229)[8]係由兩個公式所建構之，其中的時間方位方程式就是四鄰公式。因此，引發吾人探討四鄰公式的動機。

四鄰公式具有正切或餘切函數，而納皮爾法則(Napier’s rule)法則二的公式亦含有正切或餘切函數，它們是否相關？值得吾人推敲；若能運用四鄰公式直接推論納皮爾法則二的公式，則可改善透過納皮爾法則一間接推論納皮爾法則二的方式。

本文除本章前言外後續章節安排如下：第二章從幾何、代數與向量等不同觀點推導四鄰公式，繼而說明其在航海學上的應用實例，並進而在第三章利用四鄰公式直接推論納皮爾法則二的公式。最後，於第四章提出結論。

貳、四鄰公式之推導

2.1 球面三角學中基本公式彙整

球面三角學主要在探討球面三角中，三個邊及三個角等六個變數彼此間的關係，如圖 1 所示。其基本公式則為四個變數所組成，據此，共可獲得十五組關係式，分別為正弦律、餘弦律及四鄰公式。本文彙整如表 1 所示。

從圖 1 和表 1 得知：正弦律為球面三角形中兩對邊角之關係式；邊餘弦律(side cosine law)是球面三角形中三邊和任一角的關係式；角餘弦律(angle cosine law)是球面三角形中三角和任一邊的關係式；四鄰公式則為環繞球面三角形的兩邊及兩角之關係式。

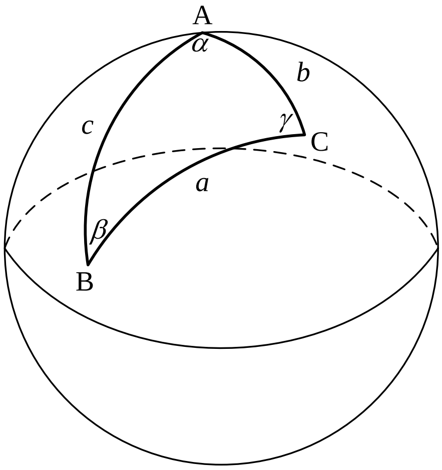

圖 1 球面三角示意圖

表 1 球面三角之正弦律、餘弦律與四鄰公式

名稱	變數	公式
正弦律	a、b、α、β	$\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}$
	a、c、α、γ	$\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}$
	b、c、β、γ	$\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}$
邊餘弦律	a、b、c、α	$\cos a=\cos b\cos c+\sin a\sin b\cos\alpha$
	a、b、c、β	$\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos\beta$
	a、b、c、γ	$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma$

表 1　球面三角之正弦律、餘弦律與四鄰公式（續）

名稱	變數	公式
角餘弦律	α、β、γ、a	$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$
	α、β、γ、b	$\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b$
	α、β、γ、c	$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$
四鄰公式	b、α、c、β	$\cos\alpha\cos c = \cot b\sin c - \cot\beta\sin\alpha$
	c、α、b、γ	$\cos\alpha\cos b = \cot c\sin b - \cot\gamma\sin\alpha$
	c、β、a、γ	$\cos\beta\cos a = \cot c\sin a - \cot\gamma\sin\beta$
	a、β、c、α	$\cos\beta\cos c = \cot a\sin c - \cot\alpha\sin\beta$
	a、γ、b、α	$\cos\gamma\cos b = \cot a\sin b - \cot\alpha\sin\gamma$
	b、γ、a、β	$\cos\gamma\cos a = \cot b\sin a - \cot\beta\sin\gamma$

2.2 四鄰公式之證明

四鄰公式之記憶口訣概分為日式圖示法及英式文字法[6,7]，吾人以日式為主，英式為輔，整理口訣如下：

「cos (內角) cos (內邊) = cot (外邊) sin (內邊) – cot (外角) sin (內角)」。

四鄰公式：於任意 $\hat{\Delta}$ABC 中，下列六式恆成立；

$$\cos\alpha\cos c = \cot b\sin c - \cot\beta\sin\alpha \tag{1a}$$

$$\cos\alpha\cos b = \cot c\sin b - \cot\gamma\sin\alpha \tag{1b}$$

$$\cos\beta\cos a = \cot c\sin a - \cot\gamma\sin\beta \tag{1c}$$

$$\cos\beta\cos c = \cot a\sin c - \cot\alpha\sin\beta \tag{1d}$$

$$\cos\gamma\cos b = \cot a\sin b - \cot\alpha\sin\gamma \tag{1e}$$

$$\cos\gamma\cos a = \cot b\sin a - \cot\beta\sin\gamma \tag{1f}$$

有關四鄰公式之証明，英國學者 Clough-Smith, J. H. 採幾何觀點証之，而日本學者高橋 巖則採代數觀點証之，兩者的証明過程，吾人整理如圖 2 所示。

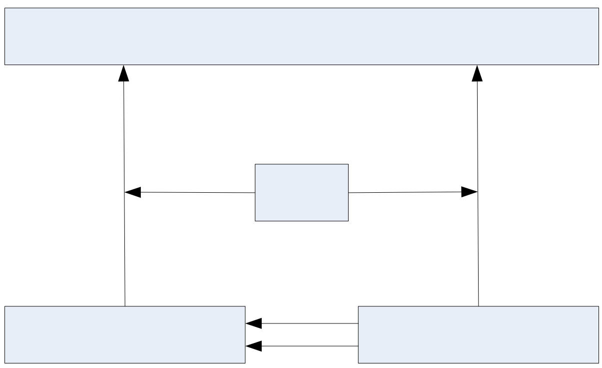

圖 2 幾何及代數觀點証明四鄰公式之示意圖

事實上，採用向量觀點推導四鄰公式更具有其直觀性。以下就幾何、代數及

向量等觀點推導四鄰公式。

1.幾何觀點

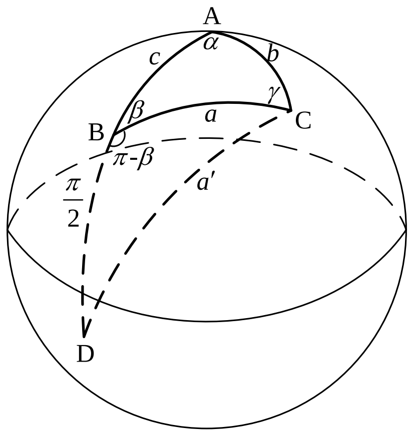

圖 3 幾何觀點之四鄰公式示意圖

如圖 3 所示，延長 $\overset{\frown}{AB}$ 至 D，作補助線使 $\overset{\frown}{BD}=\dfrac{\pi}{2}$，並連接 $\overset{\frown}{CD}$ 且令其為 a'，則 $\hat{\Delta}$ADC、$\hat{\Delta}$BDC 邊餘弦律成立如下：

$$\cos a' = -\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos\alpha$$

$$\cos a' = -\sin a \cos\beta$$

比較上兩式，可得

$$\cos b \sin c = \sin b \cos c \cos\alpha + \sin a \cos\beta \tag{2}$$

觀察式(2), 即為a,b,c,α,β之組合式, 若欲得b,c,α,β之四鄰公式, 則需剔除a, 而正弦律如下式：

$$\sin a=\frac{\sin\alpha\times\sin b}{\sin\beta}$$

將上式代回式(2), 並同除以$\sin b$, 移項整理可得四鄰公式中的式(1a)

$$\cos\alpha\cos c=\cot b\sin c-\cot\beta\sin\alpha$$

2.代數觀點

對$\hat{\Delta}$ABC 邊餘弦律中任取兩式：

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$$

$$\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos\beta$$

將上式代入下式, 整理可得五部公式如下：

$$\cos b\sin c=\sin b\cos c\cos\alpha+\sin a\cos\beta$$

觀察上式, 發現就是式(2), 同前述(幾何觀點部分)作法, 同理, 可得四鄰公式中的式(1a)

$\cos\alpha\cos c = \cot b\sin c - \cot\beta\sin\alpha$

3.向量觀點

如圖 4 所示，設 O 為單位球之球心， A , B , C 是$\hat{\Delta}$ABC 之頂點，令$\overline{OA}=\vec{a}$，$\overline{OB}=\vec{b}$， $\overline{OC}=\vec{c}$，又a , b , c 分別為$\hat{\Delta}$ABC 中 A , B , C 之對邊弧長。可知：

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos c$， $\vec{b}\cdot\vec{c}=\cos a$， $\vec{a}\cdot\vec{c}=\cos b$

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sin c$， $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\sin a$， $\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|=\sin b$

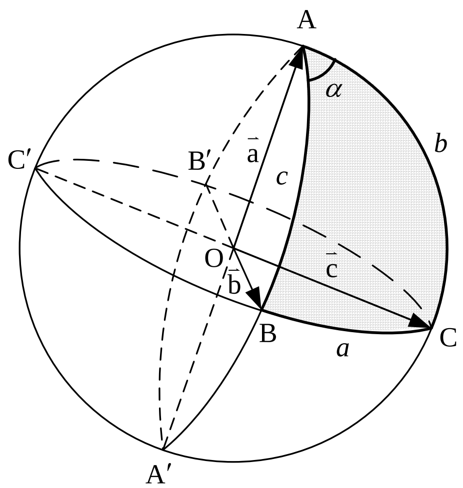

圖 4 向量觀點之四鄰公式示意圖

為了引出兩面角α，如圖 4 所示，兩平面之法向量分別為$(\vec{a}\times\vec{b})$及$(\vec{a}\times\vec{c})$，其內積可求得$\cos\alpha$，而其外積則可求得$\sin\alpha$，兩者相除即可獲得$\cot\alpha$，其証明程序如下述：

$$\frac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})}{\left|(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})\right|}=\frac{\sin c\sin b\cos\alpha}{\sin c\sin b\sin\alpha} \quad \text{(幾何意義)}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}}{\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)} \quad \text{(代數意義)}$$

兩式整理,

$$\cot\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})} \tag{3}$$

觀察四鄰公式的六式中，有 $\cot\alpha$ 者有式(1d)及式(1e)。

若欲得式(1d)，即擁有 a , β , c , α 之組合式，則針對式(3)，引進 β 及剔除 b ，因此，將下兩式代回式(3)

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\sin a\sin c\sin\beta \quad \text{(三重積)}$$

$$\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos\beta \quad \text{(邊餘弦律)}$$

可得

$$\cot\alpha = \frac{\cos a - \cos c(\cos a\cos c + \sin a\sin c\cos\beta)}{\sin a\sin c\sin\beta}$$

移項整理後，即得四鄰公式中的式(1d)

$$\cos\beta\cos c = \cot a\sin c - \cot\alpha\sin\beta$$

同理，若欲得式(1e)，即擁有a,γ,b,α之組合式，則針對式(3)，引進γ及剔除c，因此，將下兩式代回式(3)

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \sin a\sin b\sin\gamma \qquad \text{(三重積)}$$

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma \qquad \text{(邊餘弦律)}$$

移項整理後，則可得四鄰公式中的式(1e)

$$\cos\gamma\cos b = \cot a\sin b - \cot\alpha\sin\gamma$$

2.3 應用實例

地文航海學中，大圈球面三角如圖 5 所示。在已知啟航點緯度(latitude of the departure, L_F)、到達點緯度(latitude of the destination, L_T)及兩點間經度差

(difference of longitude, DLo)之情況下，欲求大圈初航向角(course angle, C)？若考量誤差傳播特性，則最佳公式之首選即是四鄰公式[9]，如下式：

$$\cos(DLo)\cos(90° - L_F) = \cot(90° \mp L_T)\sin(90° - L_F) - \cot(C)\sin(DLo)$$

移項整理，可得

$$\tan C = \frac{\sin DLo}{[\cos L_F \cdot \tan(\pm L_T)] - [\sin L_F \cdot \cos DLo]}$$

其中，L_T 的正負號判定為：與 L_F 同名取正值，反之取負值。

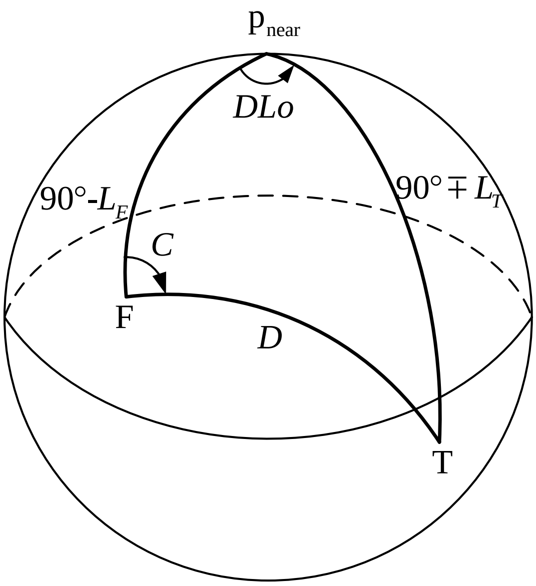

圖 5 大圈球面三角示意圖

[例題 1] 船長採用大圈航法從澳洲雪梨(Sydney, Australia)$\left[33°51.5'S,\ 151°13.0'E\right]$航行至巴拿馬貝爾波亞(Balboa, Panama)$\left[08°53.0'N,\ 079°31.0'W\right]$，求大圈初航向角？

[解]

將 $L_F = 33°51.5'S$ 、 $L_T = -08°53.0'N$ 、 $DLo = 129°16.0'E$ ，代入四鄰公式

其大圈初航向角為 $C = S73.9°E$ ，即航向為 $C_n = 106.1°$

值得一提的是，大圈初航向角對於頂點是否在航路上的判定相當重要，本例題的頂點即在航路上。

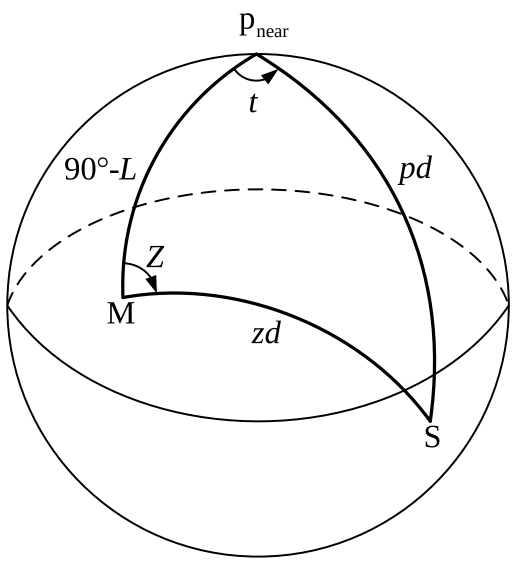

圖 6 天文球面三角示意圖

天文航海學中，天文球面三角如圖 6 所示，在已知觀測者緯度(latitude，L)、天體極距(polar distance，pd；$90°\mp d$)及天體子午角(meridian angle，t)之情況下，欲求天體方位角(azimuth angle，Z)？若考量誤差傳播特性，則最佳公式即是四鄰公式[10]，同前述作法，其公式如下：

$$\tan Z = \frac{\sin t}{(\cos L \cdot \tan d) - (\sin L \cdot \cos t)}$$

該式為建構航海測天解算表冊(Pub.No.229)的兩公式之一。

[例題 2] 航海人員在推算船位$[L41°34.8'N, \lambda017°00.5'W]$時，對天體 Alkaid 進行天文觀測，若已知該天體地理位置為$[49°25.7'N, 003°14.2'W]$，求天體方位角？

[解]

將L=41°34.8'N、d=49°25.7'N、t=13°46.3'E，代入四鄰公式

其天體方位角為Z=N46°06.4'E，即天體方位為Z_n=046.1°

參、納皮爾法則的公式推論

3.1 納皮爾法則

假設地球為一單位球，其球面幾何性質有「任一大圓上，其頂點處與子午線的交角必為90°。」及「極至主圓(即赤道)上任一點的大圓弧長必為90°。」又因為90°的正弦值為 1 和餘弦值為 0，因此，將使得直角球面三角(有一角為90°)及象限球面三角(有一邊為90°)的球三公式更為簡單；若能有效掌握，在實務應用上將會更加靈活。

球面三角的基本公式總計有十五個關係式(6 取 4 的組合數)，若其中某變數為 90° 時，則基本公式有十個關係式(5 取 3 的組合數)。蘇格蘭人納皮爾(John Napier, 1550-1617；對數的發明者)仔細觀察該十個公式，提出著名的「納皮爾法則」記憶絕招，其口訣整理如下：

「法則 1：本部正弦值=對部餘弦值之乘積」

「法則 2：本部正弦值=鄰部正切值之乘積」

3.2 直角球面三角之基本公式推導

直角球面三角，即γ=90°，如圖 7 所示，參考右側圓形圖，依納皮爾法則，可得十個關係式，彙整於表 2。

法則 1 的公式証明相當簡單, 即將特殊角γ=90° 代入球面三角的基本公式可直接推論直角球三的基本公式，如正弦律可得式(4a)及式(4b)，邊餘弦律可得式(4c)，而角餘弦律則可得式(4d)和式(4e)。

至於法則 2 的的公式，傳統的証法係將正切或餘切化為正弦或餘弦，再透過法則 1 公式間接推論。

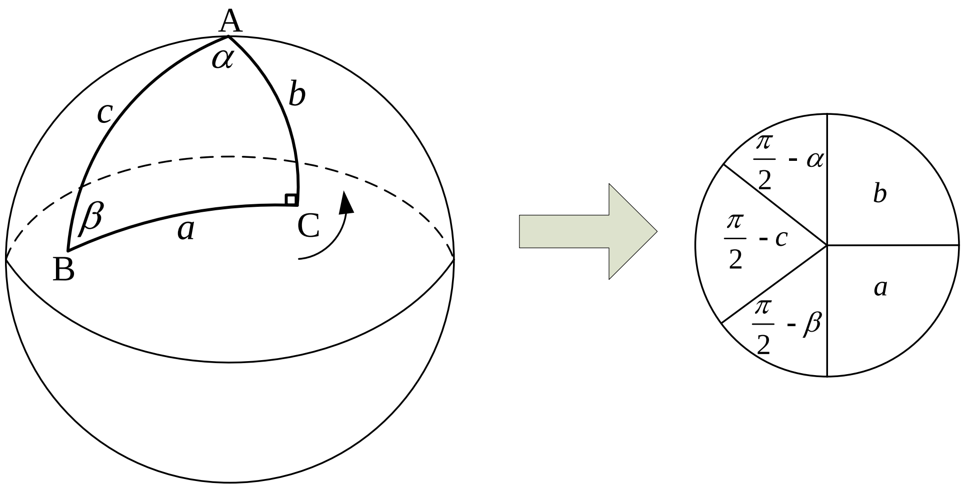

圖 7 直角球面三角納皮爾法則示意圖

表 2 直角球面三角之基本公式

直角球面三角	基本公式	公式編號
納皮爾法則 1	$\sin a = \sin\alpha \sin c$	(4a)
	$\sin b = \sin\beta \sin c$	(4b)
	$\cos c = \cos a \cos b$	(4c)
	$\cos\alpha = \sin\beta \cos a$	(4d)
	$\cos\beta = \sin\alpha \cos b$	(4e)
納皮爾法則 2	$\tan a = \tan\alpha \sin b$	(5a)
	$\tan b = \tan\beta \sin a$	(5b)
	$\tan b = \cos\alpha \tan c$	(5c)
	$\tan a = \cos\beta \tan c$	(5d)
	$\cos c = \cot\alpha \cot\beta$	(5e)

本文則根據四鄰公式直接推論法則 2 公式，即將特殊角 γ=90° 分別代入式(1f)、式(1e) 、式(1b)及式(1c)，則分別可獲得法則 2 公式的式(5a)、式(5b) 、式(5c)及式(5d) 。

至於式(5e)，即有 α, β, c 之組合式，因此，針對式(1a)，剔除變數 b 即可，即將式(5c)〔以 α, c 取代 b〕代入式(1a)，整理可獲得式(5e)；同理，針對式(1d)，亦可將式(5d)〔以 β, c 取代 a〕代入式(1d)，整理亦可獲得式(5e)。

3.3 象限球面三角之基本公式推導

象限球面三角，即c=90°，如圖 8 所示，參考右側圓形圖，依納皮爾法則，可得十個關係式，彙整於表 3。

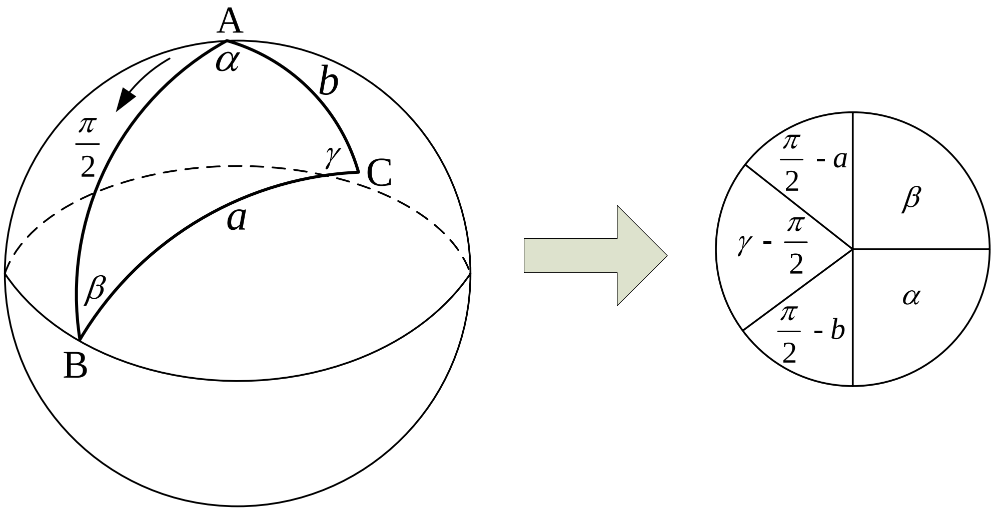

圖 8 象限球面三角納皮爾法則示意圖

表 3 象限球面三角之基本公式

象限球面三角	基本公式	公式編號
納皮爾法則 1	$\sin\alpha = \sin a \sin\gamma$	(6a)
	$\sin\beta = \sin b \sin\gamma$	(6b)
	$\cos\gamma = -\cos\alpha \cos\beta$	(6c)
	$\cos a = \sin b \cos\alpha$	(6d)
	$\cos b = \sin a \cos\beta$	(6e)

表 3 象限球面三角之基本公式（續）

象限球面三角	基本公式	公式編號
納皮爾法則 2	$\tan\alpha = \tan a \sin\beta$	(7a)
	$\tan\beta = \tan b \sin\alpha$	(7b)
	$\cos\gamma = -\cot a \cot b$	(7c)
	$\tan\alpha = -\cos b \tan\gamma$	(7d)
	$\tan\beta = -\cos a \tan\gamma$	(7e)

本文亦使用四鄰公式直接推論象限球三的法則 2 公式，仿前述作法，將特殊邊 c=90° 分別代入式(1d)、式(1a)、式(1b)及式(1c)，即可分別獲得法則 2 公式的式(7a)、式(7b)、式(7d)及式(7e)。

至於式(7c)，即有 a, b, γ 之組合式，因此，針對式(1f)，剔除變數 β 即可，即將式(7e)〔以 a, γ 取代 β〕代入式(1f)，整理獲得式(7c)；同理，針對式(1e)，亦可將式(7d)〔以 b, γ 取代 α〕代入式(1e)，整理亦可獲得式(7c)。

事實上，直角球面三角與象限球面三角互為極對偶的一對球三之公式，兩者基本公式之互換可透過極對偶引理(polar duality lemma, PDL)迅速變換求得[11]。簡言之，直角球面三角的式(4a)、式(4b)、式(4c)、式(4d)及式(4e)經由極對偶引理可得象限球面三角的式(6a)、式(6b)、式(6c)、式(6d)及式(6e)；而直角球面三角的式(5a)、式(5b)、式(5c)、式(5d)及式(5e)和象限球面三角的式(7a)、式(7b)、式(7c)、式(7d)及式(7e)，兩者亦可透過極對偶引理互相變換。

肆、結論

在考量誤差傳播的特性下，球面三角學中四鄰公式分別是大圈航法計算程序中計算大圈初航向角與天文觀測船位計算程序中計算天體方位角等的最佳公式，其重要性非常明顯。本文的主要貢獻在於應用具有直覺性的向量觀點，推導出四

鄰公式，並提出其在航海學上的應用實例，另外，採用四鄰公式直接推導直角球面三角和象限球面三角中納皮爾法則 2 的公式，以改善傳統上透過納皮爾法則 1 公式間接推導的方式。

參考文獻

1. 項武義, “平行與三角(上)”，**數學傳播季刊**, 第十三卷第二期, 頁 14-35, 1989。
2. Bowditch, N., “***American Practical Navigator***”, National Imagery and Mapping Agency, Washington, DC, 2002.
3. Maloney, E.S., “***Dutton's Navigation and Piloting***”, Naval Institute Press, Annapolis, Maryland, 1985.
4. 曹亮吉，“球面三角學簡介(一)”，**科學月刊**，第十一卷第十一期，頁 50-52, 1980。
5. 張海潮，“球面三角形的 AAA 定理”，**數學傳播季刊**，第二十八卷第一期，頁 34-37，2004。
6. Clough-Smith, J. H., “***An Introduction to Spherical Trigonometry***”, Brown, Son & Ferguson Ltd, Cardiff, Cardiff, pp.18-19, 1966.
7. 高橋巖，“**球面三角形解法**”，海文堂出版社，東京市，頁 66-81，昭和 48。
8. “***Sight Reduction Tables for Marine Navigation (Pub. No. 229)***”, National Imagery and Mapping Agency, Washington, pp. XXV, 1981.
9. Chen, C.L., Hsu, T.P. and Chang, J.R., “A Novel Approach to Great Circle Sailing: The Great Circle Equation”, ***the Journal of Navigation***, Vol. 57, No.2, pp. 311-320, 2004.
10. Hsu, T.P., Chen, C.L. and Chang, J.R., “New Computational Methods for Solving Problems of the Astronomical Vessel Position”, ***the Journal of Navigation***, Vol. 58, No.2, pp. 315-335, 2005.
11. 張建仁、陳志立，“極對偶定理在大圈航法上的應用”，**航運季刊**，第十二卷，第四期，頁 1-22，2003。